1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématique : corrigé du test 3

Version 18 novembre 2016

Corrigé du test 3 du 18-11-2016

1. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels.**

$$\frac{3x+2}{x^4+x^2}$$

Solution. La fraction donnée est propre, son dénominateur se factorise sous la forme $x^2(x^2+1)$ et tous les coefficients sont réels. Il existe donc des réels uniques A, B, C et D tels que

$$\frac{3x+2}{x^4+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)}, \ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Vu les propriétés des polynômes, cette égalité est équivalente à

$$3x+2 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B, x \in \mathbb{R}.$$

En identifiant les coefficients des différentes puissances de x, on a

$$\left\{\begin{array}{l} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=3 \\ B=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=3 \\ C=-3 \\ B=2 \\ D=-2 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\dfrac{3x+2}{x^4+x^2} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3x+2}{x^2+1}, \ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2. **Si c'est possible, calculer la limite suivante en justifiant**

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(x+1)\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)\right].$$

Solution. La fonction $x \mapsto (x+1)\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)$ est définie sur $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$, ensemble non minoré. La limite en $-\infty$ est donc envisageable.
Comme

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty \ \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \ \text{ (puisque } \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\text{)},$$

on a

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(x+1)\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)\right] = +\infty.$$

Corrigé du test 3 du 21-11-2016

1. **Une fonction primitivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ peut-elle admettre plus d'une primitive ? Si oui, existe-t-il un lien entre elles ?**

Solution. Voir cours page 113.

2. **Si c'est possible, calculer la limite suivante en justifiant**

$$\lim_{x\to(-2)^+}\left[\frac{\sin(4+2x)}{x^2-4}\right].$$

Solution. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(4+2x)}{x^2-4}$ est définie sur $A = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$. Comme tout intervalle ouvert contenant -2 rencontre $A \cap]-2, +\infty[=]-2, 2[\cup]2, +\infty[$, la limite à droite de -2 est envisageable.
Puisque $\lim\limits_{x\to(-2)^+}(4+2x) = 0$, par le théorème des limites des fonctions composées, on a $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\sin(4+2x) = \sin(0) = 0$. On a aussi $\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x^2-4) = 0$.
Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, on vérifie les hypothèses du théorème de l'Hospital.
Soit $V =]-2, -2+\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ assez petit) et considérons les fonctions $g : x \mapsto \sin(4+2x)$ et $h : x \mapsto x^2 - 4$.
* Ces fonctions sont dérivables dans $\mathbb{R}$, donc dans V
* $Dh(x) = 2x \neq 0\ \forall x \in]-\infty, 0[$, donc dans V
* $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{2\cos(4+2x)}{2x} = \dfrac{2\cos(0)}{-4} = \dfrac{-1}{2}$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut $\frac{-1}{2}$.

Corrigé du test 3 du 22-11-2016

1. **Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert A de $\mathbb{R}$. Qu'appelle-t-on primitive de f sur A ?**

Solution. Voir cours page 112.

2. **Si c'est possible, calculer la limite suivante en justifiant**

$$\lim_{x\to 1^-}\left[(x-1)\ln(1-x)\right].$$

Solution. La fonction $x \mapsto (x-1)\ln(1-x)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0\} =]-\infty, 1[.$$

Puisque tout intervalle ouvert contenant 1 rencontre $A \cap]-\infty, 1[=]-\infty, 1[$, la limite à gauche de 1 est envisageable.

On a $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1) = 0^-$, et $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x) = -\infty$ (par application du théorème des limites des fonctions composées puisque $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{y\to 0^+}\ln(y) = -\infty$).
Pour lever l'indétermination $0 \,.\, \infty$, on utilise le théorème de l'Hospital si les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme $x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{(x-1)^{-1}}$.

Considérons $V =]1-\varepsilon, 1[$ ($\varepsilon > 0$ assez petit) et considérons les fonctions $g : x \mapsto \ln(1-x)$ et $h : x \mapsto (x-1)^{-1}$.
* Ces fonctions sont respectivement dérivables dans $]-\infty, 1[$ et $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, donc dans V
* $Dh(x) = -(x-1)^{-2} \neq 0$ dans V
* $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \infty$
* $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(1-x)^{-1}}{-(x-1)^{-2}} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x)^{-1}}{(1-x)^{-2}} = \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x) = 0$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 0 et même 0^+ vu le signe des 2 facteurs à gauche de 1.

Corrigé du test 3 du 23-11-2016

1. **Donner une condition suffisante pour qu'une fonction admette une primitive.**

   Solution. Voir cours page 112.

2. **Si c'est possible, calculer la limite suivante en justifiant**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

Solution. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : 1-x>0\} =]-\infty, 1[$, ensemble non minoré. La limite en $-\infty$ est donc envisageable.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$ (par application du théorème des limites des fonctions composées puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\ln(y) = +\infty$).
On a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}|x| = +\infty$.

Pour lever l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$, on utilise le théorème de l'Hospital si les hypothèses sont vérifiées
Soit $V =]-\infty, -N[$ avec $N>0$ assez grand et considérons les fonctions $g : x \mapsto \ln(1-x)$ et $h : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.
* Ces fonctions sont respectivement dérivables dans $]-\infty, 1[$ et $\mathbb{R}$, donc dans V
* $Dh(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, donc dans V
* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{x^2+1}}{(1-x)x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-|x|}{(1-x)x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{(1-x)x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x} = 0$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 0 et même 0^+ puisque numérateur et dénominateur sont positifs au voisinage de $-\infty$.