Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématique : corrigé du test 4

Version 12 décembre 2016

Corrigé du test 4 du 9-12-2016

1. **(a) Définir une EDLCC d'ordre 2.**
   (b) Donner l'équation homogène associée à cette équation et l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène dans le cas où le polynôme caractéristique possède une racine double.
   Solution. Voir cours.

2. **(a) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale suivante** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{4x^2-4x+1}\,dx.$
   Solution.
   (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4x^2-4x+1} = \frac{1}{(2x-1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1/2\}$, donc sur $[1,2]$ fermé borné. Par conséquent, elle y est intégrable. Une primitive de f sur $]1,2[$ est donnée par

$$\int \frac{1}{(2x-1)^2}dx \simeq \frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x-1)^2}dx \simeq \frac{1}{2}\int \frac{D(2x-1)}{(2x-1)^2}dx \simeq \frac{-1}{2(2x-1)}.$$

   Dès lors, par variation de primitive, on a

$$\int_1^2 \frac{1}{4x^2-4x+1}\,dx = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{2x-1}\right]_1^2 = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{1}{3}.$$

   (b) Justifier l'intégrabilité éventuelle de l'intégrale suivante $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx.$
   Solution. La fonction $f : x \mapsto x^2e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0,+\infty[$, fermé non borné . Comme à l'infini l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^2|x^2e^{-x}| = \lim_{x\to+\infty}(x^4e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x} = 0.$$

   Comme cette limite existe et est finie, par le critère en θ avec $\theta = 2 > 1$, la fonction est intégrable en $+\infty$ et donc sur $[0,+\infty[$.

Corrigé du test 4 du 12-12-2016

1. **(a) Définir une EDLCC d'ordre 2.**
   (b) Donner l'équation homogène associée à cette équation et l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène dans le cas où le polynôme caractéristique possède deux racines distinctes.
   Solution. Voir cours.

2. **(a) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale suivante** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx.$
   Solution.
   (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-1,0]$ fermé borné. Par conséquent, elle y est intégrable. Une primitive de f sur $]-1,0[$ est donnée par

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx \simeq \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx \simeq \frac{1}{4}\int \frac{D(x^4+1)}{\sqrt{x^4+1}}dx \simeq \frac{1}{2}\sqrt{x^4+1}.$$

   Dès lors, par variation de primitive, on a

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^4+1}\right]_{-1}^0 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Justifier l'intégrabilité éventuelle de l'intégrale suivante $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$

Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc sur $]0,1]$, borné non fermé . On a

$$\lim_{x\to 0^+} x\left|\frac{\ln(x)}{x}\right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (-\ln(x)) = +\infty.$$

Comme cette limite existe et diffère de 0, par le critère de non intégrabilité, la fonction n'est pas intégrable en 0.

Corrigé du test 4 (bis) du 12-12-2016

1. **(a) Définir une EDLCC d'ordre 2.**
   (b) Donner l'équation homogène associée à cette équation et l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène dans le cas où le polynôme caractéristique possède une racine double.
   Solution. Voir cours.

2. **(a) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale suivante** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+3}}\,dx.$
   Solution.
   (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{x^4+3}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-1,0]$ fermé borné. Par conséquent, elle y est intégrable. Une primitive de f sur $]-1,0[$ est donnée par

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+3}}dx \;\simeq\; \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+3}}dx \;\simeq\; \frac{1}{4}\int \frac{D(x^4+3)}{\sqrt{x^4+3}}dx \simeq\; \frac{1}{2}\sqrt{x^4+3}.$$

Dès lors, par variation de primitive, on a

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+3}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^4+3}\right]_{-1}^0 = \frac{\sqrt{3}-2}{2}.$$

(b) Justifier l'intégrabilité éventuelle de l'intégrale suivante $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(2x)}{x}\,dx.$

Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(2x)}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc sur $]0,1]$, borné non fermé. Comme la limite

$$\lim_{x\to 0^+} x\left|\frac{\ln(2x)}{x}\right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\ln(2x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (-\ln(2x)) = +\infty.$$

existe et diffère de 0, par le critère de non intégrabilité, la fonction n'est pas intégrable en 0.

Corrigé du test 4 du 13-12-2016

1. **(a) Définir une EDLCC d'ordre 1.**
   (b) Donner l'équation homogène associée à cette équation et l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène.

   Solution. Voir cours.

2. **(a) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale suivante** $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x^3}\,dx$.
   Solution.
   (a) La fonction $f : x \mapsto x^2 e^{-x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0,1]$ fermé borné. Par conséquent, elle y est intégrable. Une primitive de f sur $]0,1[$ est donnée par

$$\int x^2 e^{-x^3} dx \simeq \frac{-1}{3}\int (-3x^2)e^{-x^3} dx \;\simeq\; \frac{-1}{3}\int D(-x^3)e^{-x^3} dx \;\simeq\; \frac{-1}{3}e^{-x^3}.$$

   Dès lors, par variation de primitive, on a

$$\int_0^1 x^2 e^{-x^3}\,dx = \frac{-1}{3}\left[e^{-x^3}\right]_0^1 = \frac{-1}{3}\left(e^{-1} - e^0\right) = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{e-1}{3e}.$$

   (b) Justifier l'intégrabilité éventuelle de l'intégrale suivante $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2}\,dx$.

   Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-\infty,-1]$, fermé non borné .
   On a

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 \left|\frac{1}{4+x^2}\right| = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

   Dès lors, par le critère en θ, avec $\theta = 2 > 1$, comme cette limite existe et est finie, la fonction est intégrable en $-\infty$ et donc sur $]-\infty,-1]$.