1, 2, 3...Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématique

Corrigé de l'examen de Mathématique du 15 mai 2017

Version 10 mai 2017

QUESTIONNAIRE

Théorie 1.
Définir et interpréter géométriquement la notion de convexité de la fonction $f : x \mapsto (x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Théorie 2.

a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
b) En déduire que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins un zéro réel. Justifier.

Exercices

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[-\pi/2, 0]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(5x) + \sin(5x) = \frac{1}{\sin(5x)}.$$

   (b) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante en énonçant les propriétés utilisées

$$\arcsin\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{7}\right)\right).$$

   (c) Déterminer les parties réelle, imaginaire et le module du nombre complexe

$$z = (\cos(a) - i\sin(a))^2, \ a \text{ étant un réel.}$$

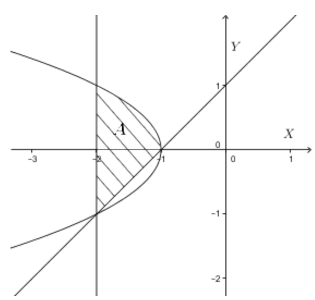
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes

$$(*) \ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-1}+x+1\right), \qquad (**) \ \lim_{x\to 0^-}\frac{\exp(3x)-1}{\cos(x)-1}.$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum

$$(*) \ \int_{\pi/6}^{2\pi/3}\frac{\operatorname{cotg}(x)}{\sin^4(x)}\,dx, \qquad (**) \ \int_3^{+\infty}\frac{2x-6}{x^2-2x}\,dx.$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré A ci-contre en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole.)



5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) + 4f(x) = \cos(2x).$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Un chercheur a réalisé une succession de tâches identiques pendant 3 heures 36 minutes. S'il avait mis une minute de moins par tâche, il aurait pu en accomplir trois de plus dans le même laps de temps. Combien de tâches a-t-il accomplies ?

   Rappel : $15^2 = 225,\ 17^2 = 289,\ 19^2 = 361,\ 51^2 = 2601,\ 53^2 = 2809,\ 55^2 = 3025.$

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.

Définir et interpréter géométriquement la notion de convexité de la fonction $f : x \mapsto (x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 2.

a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
b) En déduire que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins un zéro réel. Justifier.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[-\pi/2, 0]$, résoudre l'équation suivante**

$$\cos(5x) + \sin(5x) = \frac{1}{\sin(5x)}.$$

Solution. L'équation est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : \sin(5x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 5x \neq k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

et est équivalente à

$$\sin(5x)\cos(5x) + \sin^2(5x) = 1 \Leftrightarrow \sin(5x)\cos(5x) - (1 - \sin^2(5x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(5x)\cos(5x) - \cos^2(5x) = 0 \Leftrightarrow \cos(5x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(5x) = \cos(5x)$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad 5x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{5},\ \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[-\pi/2, 0]$ sont $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{10}, -\frac{7\pi}{20}, -\frac{3\pi}{20}$.

(b) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante en énonçant les propriétés utilisées

$$\arcsin\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{7}\right)\right).$$

Solution. La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $[-1, 1]$. De plus, la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$; dès lors, l'expression donnée est définie. On a

$$\arcsin\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{7}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{13\pi}{14}\right)\right)$$

$$= \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{14}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\right) = \frac{\pi}{14}$$

car $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ et $\mathrm{im}(\arcsin) = [-\pi/2, \pi/2]$.

(c) Déterminer les parties réelle, imaginaire et le module du nombre complexe

$$z = (\cos(a) - i\sin(a))^2, \; a \text{ étant un réel.}$$

Solution. On a

$$z = \cos^2(a) - 2i\sin(a)\cos(a) + i^2\sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) - i\sin(2a) = \cos(2a) - i\sin(2a).$$

La partie réelle de z vaut $\cos(2a)$, sa partie imaginaire vaut $-\sin(2a)$ et son module vaut $\sqrt{\cos^2(2a) + \sin^2(2a)} = 1$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(*) \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x - 1} + x + 1\right), \qquad (**) \lim_{x\to 0^-} \frac{\exp(3x) - 1}{\cos(x) - 1}.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 1} + x + 1$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 1 \geq 0\} = \left]-\infty, \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right[,$$

ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
Comme $\lim_{x\to-\infty}(x^2 - 3x - 1) = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty}\sqrt{y} = +\infty$, vu le théorème de la limite d'une fonction composée, on a $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2 - 3x - 1} = +\infty$. De plus, comme $\lim_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ on a une indétermination du type $\infty - \infty$. Pour lever cette indétermination, on multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{x^2 - 3x - 1} - (x+1)$ et on a

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2 - 3x - 1} + x + 1\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2 - 3x - 1 - x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 3x - 1} - (x+1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-5x}{|x| - x} = \frac{5}{2}.$$

(**) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\exp(3x) - 1}{\cos(x) - 1}$ est définie sur $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\, 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Comme tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $\mathrm{dom}(f) \cap]-\infty, 0[$, le calcul de la limite en 0^- peut donc être envisagé. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to 0^-}(\exp(3x) - 1) = 0^- \;\text{ et }\; \lim_{x\to 0^-}(\cos(x) - 1) = 0^-.$$

Pour lever l'indétermination $0\,/\,0$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées. En effet, si $V =]-\pi/2, 0[$ (par exemple), on a
1) $f_1 : x \mapsto \exp(3x) - 1$ et $f_2 : x \mapsto \cos(x) - 1$ sont dérivables dans $\mathbb{R}$ donc dans V
2) $Df_2(x) = -\sin(x) \neq 0$ dans V
3) $\lim_{x\to 0^-} f_2(x) = 0^-$ et $\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = 0^-$
4) $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim_{x\to 0^-}\dfrac{3\exp(3x)}{-\sin(x)} = +\infty$ puisque $\lim_{x\to 0^-} 3\exp(3x) = 3$ et $\lim_{x\to 0^-}(-\sin(x)) = 0^+$.
Dès lors, la limite cherchée vaut $+\infty$.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(*) \int_{\pi/6}^{2\pi/3} \frac{\mathrm{cotg}(x)}{\sin^4(x)}\, dx, \qquad (**) \int_3^{+\infty} \frac{2x - 6}{x^2 - 2x}\, dx.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{cotg}(x)}{\sin^4(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin^5(x)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$. Cela étant, comme $\cos(x) = D\sin(x)$, on a

$$I = \int_{\pi/6}^{2\pi/3} \frac{\mathrm{cotg}(x)}{\sin^4(x)}\, dx = \int_{\pi/6}^{2\pi/3} D\sin(x)\, \frac{1}{\sin^5(x)}\, dx = \left[-\frac{1}{4\sin^4(x)}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}.$$

Comme $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, on a $\sin^4(\frac{2\pi}{3}) = \frac{9}{16}$ et $\sin^4(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{16}$. Dès lors,

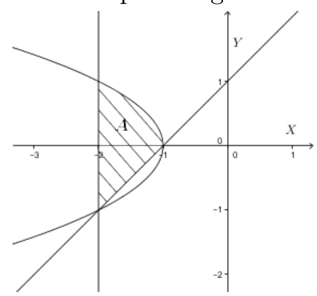
$$I = -\frac{1}{4}\left(\frac{16}{9} - 16\right) = 4 - \frac{4}{9} = \frac{32}{9}.$$

(**) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-6}{x^2-2x}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \setminus \{2\}$ donc sur $[3, +\infty[$, ensemble non borné. Comme $|f(x)| = f(x),\ \forall x \in [3, +\infty[$, en calculant

$$\lim_{x\to+\infty}(x|f(x)|) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(2x-6)}{x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2} = 2,$$

on voit que cette limite existe et diffère de 0. Dès lors, la fonction n'est pas intégrable en $+\infty$.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré A ci-contre en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole.)**



Solution.
La parabole d'axe d'équation $y = 0$ passe par les points de coordonnées $(-1, 0), (-2, -1)$ et $(-2, 1)$. Dès lors, elle a pour équation cartésienne $x = -y^2 - 1$; celle de la droite verticale est $x = -2$ et celle de la droite oblique est $y = x + 1$. Ainsi, l'ensemble A fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0],\ x \in [-2, y-1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in [-2, -y^2 - 1]\}.$$

5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) + 4f(x) = \cos(2x).$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + 4f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 4$ dont les zéros sont $-2i$ et $2i$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1\, e^{-2ix} + c_2 e^{2ix} = c_1^* \cos(2x) + c_2^* \sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2, c_1^*, c_2^* sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière f_P sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto \cos(2x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme les coefficients sont réels, cherchons d'abord une solution particulière de $D^2F(x) + 4F(x) = e^{2ix}$ (*) .
Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1.e^{2ix}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient $2i$ de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $F_P(x) = Ax\, e^{2ix},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.
Comme $DF_P(x) = (A + 2iAx)\, e^{2ix}$ et $D^2F_P(x) = (4iA - 4Ax)e^{2ix}$, en remplaçant dans (*), on a

$$4iAe^{2ix} = e^{2ix} \Leftrightarrow A = \frac{-i}{4}.$$

Dès lors, $F_P(x) = \dfrac{-ix}{4}\, e^{2ix} = \dfrac{-ix}{4}\cos(2x) + \dfrac{x}{4}\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$ et $f_P(x) = \Re F_P(x) = \frac{x}{4}\sin(2x), x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1^* \cos(2x) + \left(c_2^* + \frac{x}{4}\right) \sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1^*, c_2^* sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un chercheur a réalisé une succession de tâches identiques pendant 3 heures 36 minutes. S'il avait mis une minute de moins par tâche, il aurait pu en accomplir trois de plus dans le même laps de temps. Combien de tâches a-t-il accomplies ?

Rappel : $15^2 = 225,\ 17^2 = 289,\ 19^2 = 361,\ 51^2 = 2601,\ 53^2 = 2809,\ 55^2 = 3025$.

Solution. Soit $x > 0$ le nombre de tâches accomplies par le chercheur et $t > 0$ le temps en minute pour accomplir une tâche. De plus, 3 heures 36 minutes = $(3\ .\ 60+36)$ minutes = 216 minutes.

Dès lors, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} xt = 216 \\ (x+3)(t-1) = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{216}{t} \\ \left(\frac{216}{t} + 3\right)(t-1) = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{216}{t} \\ 216 + 3t - \frac{216}{t} - 3 = 216 \end{cases}.$$

La deuxième équation du système est équivalente à $3t^2 - 3t - 216 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 72 = 0 \Leftrightarrow (t-9)(t+8) = 0$. Comme $t > 0$, la seule solution de cette équation est $t = 9$. En introduisant cette valeur dans la première équation du système, on obtient $x = \frac{216}{9} = 24$.
Ainsi, le chercheur a accompli 24 tâches.