1, 2, 3...Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématique

Corrigé de l'examen de Mathématique du 22 juin 2017

Version 11 juin 2017

QUESTIONNAIRE

<u>Théorie 1</u>.
Définir et interpréter géométriquement la notion de convexité de la fonction $f : x \mapsto (x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorie 2</u>.

a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
b) En déduire que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins un zéro réel. Justifier.

$\boxed{\textbf{\textit{Exercices}}}$

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation suivante

$$4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 3.$$

(b) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante en énonçant les propriétés utilisées

$$\ln\left(\sqrt{(-4)^2}\right) - \ln\left(\frac{\sin(-7\pi/6)}{e}\right).$$

(c) Déterminer la partie imaginaire et le module du nombre complexe

$$z = \frac{1}{i^{37}(1-i)}.$$

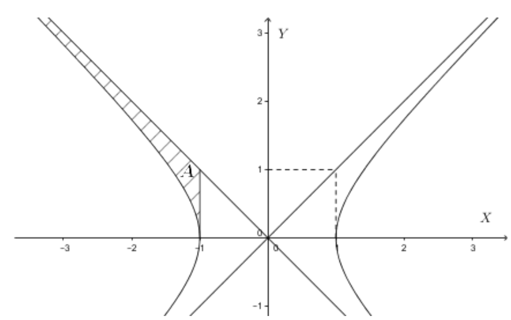
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes

$$(*)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{|2-x|}, \qquad (**)\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{1-\exp(2x)}.$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum

$$(*)\ \int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{tg}(x)\ dx, \qquad (**)\ \int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\ dx.$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré A ci-contre en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une hyperbole.)



5. (a) Vérifier que la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : t \mapsto \dfrac{1}{1-e^t}$ est solution de l'équation différentielle

$$Df(t) = f(t)(f(t)-1).$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$4D^2f(x) - Df(x) = x.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Le propriétaire d'un terrain reçoit une note de sa commune l'avertissant que des modifications vont être apportées à sa propriété à cause de la construction d'une route.
Le terrain, préalablement rectangulaire, a une longueur deux fois plus grande que sa largeur. Avec les modifications imposées, il verra sa largeur augmentée de 3 mètres et sa longueur diminuée de 0,5 décamètre. A la réception de cette lettre, le propriétaire se réjouit en constatant que l'aire de son terrain sera augmentée par cette expropriation.
Quelle condition doit vérifier la largeur initiale de son terrain pour qu'il en soit ainsi ?

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.

Définir et interpréter géométriquement la notion de convexité de la fonction $f : x \mapsto (x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 2.

a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
b) En déduire que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins un zéro réel. Justifier.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Exercices

1. **Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation suivante**
$$4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 3.$$
Solution. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ et est équivalente à
$$4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 3 = 0.$$
Comme le discriminant de cette équation du second degré (d'inconnue $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$) vaut $\Delta = 64$, on a
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{4+8}{8} = \frac{3}{2}, \text{ ce qui est impossible, ou } \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{4-8}{8} = \frac{-1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{x}{2} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{3} + 4k\pi.$$
Dès lors, la solution dans l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$ est $-\dfrac{\pi}{3}$.

(b) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante en énonçant les propriétés utilisées
$$\ln\left(\sqrt{(-4)^2}\right) - \ln\left(\frac{\sin(-7\pi/6)}{e}\right).$$
Solution. La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ et la fonction sin sur $\mathbb{R}$. On a $\sqrt{(-4)^2} = 4 > 0$, $\sin(-7\pi/6) = \sin(\pi/6) = 1/2$ et donc $\dfrac{\sin(-7\pi/6)}{e} = \dfrac{1}{2e} > 0$; dès lors, l'expression donnée est

définie.
Puisque pour tous $x, y \in]0, +\infty[$, on a $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$ et $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, l'expression s'écrit

$$\ln\left(\sqrt{(-4)^2}\right) - \ln\left(\frac{\sin(-7\pi/6)}{e}\right) = \ln(4) - \ln\left(\frac{1}{2e}\right) = 2\ln(2) - \ln(1) + \ln(2) + \ln(e) = 3\ln(2) + 1$$

car $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

(c) Déterminer la partie imaginaire et le module du nombre complexe

$$z = \frac{1}{i^{37}(1-i)}.$$

Solution. Comme $i^{37} = i^{36}\ i^1 = i$, on a

$$z = \frac{1}{i^{37}(1-i)} = \frac{1}{i(1-i)} = \frac{1}{i+1} = \frac{1-i}{2}.$$

La partie imaginaire de z vaut $\frac{-1}{2}$ et son module vaut $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(*) \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{|2-x|}, \qquad (**) \lim_{x\to0^-} \frac{\sin(x)}{1-\exp(2x)}.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{|2-x|}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
Comme $\lim_{x\to-\infty}(3x^2+1) = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty}\sqrt{y} = +\infty$, vu le théorème de la limite d'une fonction composée, on a $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2+1} = +\infty$. De plus, comme $\lim_{x\to-\infty}|2-x| = +\infty$, on a une indétermination du type ∞/∞. Pour lever cette indétermination, on met x en évidence au numérateur et au dénominateur et on a

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{|2-x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{2-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3+1/x^2}}{x(-1+2/x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3+1/x^2}}{-x(1-2/x)} = \sqrt{3}.$$

(**) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-\exp(2x)}$ est définie sur $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exp(2x) \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Comme tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $\mathrm{dom}(f) \cap]-\infty, 0[$, le calcul de la limite en 0^- peut être envisagé. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to0^-}(\sin(x)) = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^-}(1-\exp(2x)) = 0^+.$$

Pour lever l'indétermination $0\ /\ 0$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées. En effet, si $V =]-\infty, 0[$ (par exemple), on a
1) $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ et $f_2 : x \mapsto 1 - \exp(2x)$ sont dérivables dans $\mathbb{R}$ donc dans V
2) $Df_2(x) = -2\exp(2x) \neq 0$ dans V
3) $\lim_{x\to0^-} f_2(x) = 0^+$ et $\lim_{x\to0^-} f_1(x) = 0^-$
4) $\lim_{x\to0^-}\dfrac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim_{x\to0^-}\dfrac{\cos(x)}{-2\exp(2x)} = -\dfrac{1}{2}$ puisque $\lim_{x\to0^-}\cos(x) = 1$ et $\lim_{x\to0^-}(-2\exp(2x)) = -2$.
Dès lors, la limite cherchée vaut $-\frac{1}{2}$.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(*) \int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{tg}(x)\ dx, \qquad (**) \int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\ dx.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \operatorname{tg}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; elle est donc continue sur l'intervalle non fermé, borné $]-\frac{\pi}{2}, 0]$. Puisque la fonction est de signe constant (négatif) sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$, vérifions son intégrabilité en $(-\pi/2)^+$ par la définition.
Pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$,la fonction est continue sur le fermé borné $[t, 0]$; elle y est donc intégrable. On a

$$\lim_{t\to(-\pi/2)^+} \int_t^0 \operatorname{tg}(x)\ dx = \lim_{t\to(-\pi/2)^+} [-\ln(|\cos(x)|)\ ]_t^0 = -\ln(1) + \lim_{t\to(-\pi/2)^+} \ln(\cos(t))$$
$$= 0 + \lim_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty.$$

Comme cette limite existe mais n'est pas finie, la fonction n'est pas intégrable en $(-\pi/2)^+$.

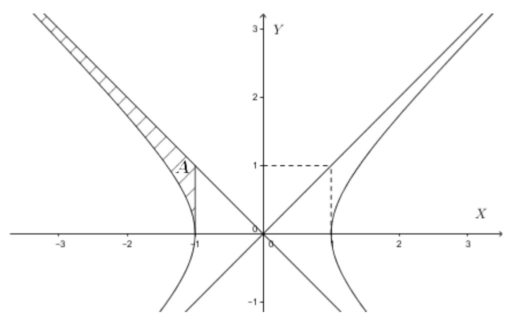
(**) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-2, +\infty[$, ensemble fermé, non borné. Pour vérifier l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$, on peut utiliser le critère en θ de la manière suivante : calculons la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 \left| \frac{1}{4+x^2} \right| \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{4+x^2} \right) = 1.$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 2 > 1$, par le critère d'intégrabilité en θ, f est intégrable en $+\infty$ donc finalement sur $[2, +\infty[$. On a

$$\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\ dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\ dx = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{-2}^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{arctg}(-1) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}.$$

4. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré A ci-contre en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une hyperbole.)**



Solution.
L'hyperbole (dont les asymptotes ont pour équation $y = x$ et $y = -x$) coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-1, 0)$ et $(0, 1)$. Dès lors, elle a pour équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$; celle de la droite verticale est $x = -1$; celle de l'asymptote oblique délimitant l'ensemble A est $y = -x$. Ainsi, l'ensemble A fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in [-\sqrt{1+y^2}, -1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[,\ x \in [-\sqrt{1+y^2}, -y]\}.$$

5. **(a) Vérifier que la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : t \mapsto \dfrac{1}{1-e^t}$ est solution de l'équation différentielle**

$$Df(t) = f(t)(f(t)-1).$$

Solution. La fonction donnée est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En appliquant les théorèmes de dérivation, on obtient

$$Df(t) = \frac{-1}{(1-e^t)^2}(-e^t) = \frac{e^t}{(1-e^t)^2}.$$

De plus,

$$f(t)(f(t)-1) = \frac{1}{1-e^t}\left(\frac{1}{1-e^t}-1\right) = \frac{1}{1-e^t}.\frac{1-1+e^t}{1-e^t} = \frac{e^t}{(1-e^t)^2}.$$

Dès lors, la fonction f est bien solution de l'équation différentielle donnée.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$4D^2f(x) - Df(x) = x.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $4D^2f(x) - Df(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto 4z^2 - z$ dont les zéros sont 0 et $\frac{1}{4}$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 + c_2\, e^{\frac{x}{4}},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. C'est aussi une exponentielle-polynôme $x.e^{0x}$, produit d'un polynôme de degré 1 et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_p(x) = (Ax+B)\,xe^{0x} = Ax^2 + Bx,\ x \in \mathbb{R}$ où A et B sont des constantes à déterminer.
Comme $Df_p(x) = 2Ax + B$ et $D^2f_p(x) = 2A$, on a, en remplaçant dans l'équation de départ,

$$8A - 2Ax - B = x \Leftrightarrow -2Ax + (8A - B) = x \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2} \text{ et } B = -4.$$

Ainsi, $f_p(x) = -\dfrac{x^2}{2} - 4x,\ x \in \mathbb{R}$, et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 + c_2\, e^{\frac{x}{4}} - \frac{x^2}{2} - 4x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Le propriétaire d'un terrain reçoit une note de sa commune l'avertissant que des modifications vont être apportées à sa propriété à cause de la construction d'une route. Le terrain, préalablement rectangulaire, a une longueur deux fois plus grande que sa largeur. Avec les modifications imposées, il verra sa largeur augmentée de 3 mètres et sa longueur diminuée de 0,5 décamètre. A la réception de cette lettre, le propriétaire se réjouit en constatant que l'aire de son terrain sera augmentée par cette expropriation.
Quelle condition doit vérifier la largeur initiale de son terrain pour qu'il en soit ainsi ?

Solution. Soit $x > 0$ la largeur initiale du terrain (en mètres). La longueur initiale du terrain (en mètres) vaut donc $2x$ et l'aire initiale du terrain (en mètres carrés) vaut $2x^2$.
Après modifications urbanistiques, comme la largeur vaudra $x+3$ et la longueur $2x-5$ ($0,5$ dam $=$

5 m), l'aire du terrain vaudra $(x+3)(2x-5) = 2x^2 + x - 15$.
Comme l'aire du terrain augmente, on a

$$2x^2 + x - 15 > 2x^2 \Leftrightarrow x > 15.$$

Il faut donc que le terrain possède une largeur initiale de plus de 15 mètres pour que le propriétaire soit content !