1, 2, 3...Sciences

Année académique 2016-2017

Corrigé de l'examen de mathématique du 17 août 2017

Version 17 août 2017

QUESTIONNAIRE

Théorie

Question 1. Définir géométriquement le produit vectoriel de deux vecteurs.

Question 2. Définir la continuité et la dérivabilité d'une fonction g d'une variable en un point a de son domaine de définition. Enoncer et démontrer le lien entre ces deux notions.

Exercices

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante
$$\cos(2x) = 3\sin(x) + 2.$$
(b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes
$$\arcsin\left(\sin(\frac{4\pi}{3})\right), \qquad \exp\left(\ln(\sqrt{e}) - \ln(8)\right).$$
(c) Déterminer les partie réelle et imaginaire de $\dfrac{i}{(1+i)^2}$.
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x), \qquad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{3\pi}{2}}.$$
3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx, \qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \mathrm{tg}^2(2x)\,dx.$$
4. On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 4x^2+y^2\geq 4 \text{ et } x^2-4y^2\leq 4\right\}.$$
5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$4D^2f(x)+f(x)=\sin(2x).$$
6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
On achète 150 *litres de lait chez un fermier. Pour vérifier s'il y a fraude, on pèse les* 150 *litres et on trouve* 153,48 *kg. Trouver combien de litres de lait ont été remplacés par de l'eau si un litre de lait non frelaté pèse* 1030 *g.*

CORRIGE

Théorie

Question 1.
Définir géométriquement le produit vectoriel de deux vecteurs.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Question 2.
Définir la continuité et la dérivabilité d'une fonction g d'une variable en un point a de son domaine de définition. Enoncer et démontrer le lien entre ces deux notions.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante**
$$\cos(2x) = 3\sin(x) + 2.$$

Solution. Comme $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, l'équation donnée est équivalente à

$$2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -1 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} : x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

(b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$\arcsin\left(\sin(\frac{4\pi}{3})\right), \qquad \exp\left(\ln(\sqrt{e}) - \ln(8)\right).$$

Solution. Comme $\mathrm{dom}(\sin) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{im}(\sin) = [-1, 1] = \mathrm{dom}(\arcsin)$, l'expression $\arcsin\left(\sin(\frac{4\pi}{3})\right)$ est définie. Dès lors, vu que $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, on a $\arcsin\left(\sin(\frac{4\pi}{3})\right) = -\frac{\pi}{3}$, les fonctions arcsin et sin étant impaires et inverses l'une de l'autre pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Comme $\mathrm{dom}(\sqrt{\ }) = [0, +\infty[$ et $e > 0$, que $\mathrm{dom}(\ln) =]0, +\infty[$ et $\mathrm{dom}(\exp) = \mathbb{R}$, l'expression $\exp\left(\ln(\sqrt{e}) - \ln(8)\right)$ est définie. De plus, en appliquant les propriétés $\forall x, y > 0 : \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$ et $\forall x > 0 : \exp(\ln(x)) = x$, on obtient

$$\exp\left(\ln(\sqrt{e}) - \ln(8)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{8}\right)\right) = \frac{\sqrt{e}}{8}.$$

(c) Déterminer les partie réelle et imaginaire de $\frac{i}{(1+i)^2}$.

Comme $(1+i)^2 = 2i \neq 0$ la fraction est définie. Dès lors, $\frac{i}{(1+i)^2} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}$; la partie réelle de ce nombre complexe vaut $\frac{1}{2}$ et sa partie imaginaire vaut 0.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x), \qquad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{3\pi}{2}}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-x}-x$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : x^2-x \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, ensemble non majoré ; le calcul de la limite en $+\infty$ peut donc être envisagé. Pour lever l'indétermination "$+\infty - \infty$", on multiplie numérateur et dénominateur par le binôme conjugé de $\sqrt{x^2-x}-x$ et on a

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1)} = -\frac{1}{2}$$

car d'une part x peut être simplifié et d'autre part

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \text{ et donc } \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1) = 1+1 = 2.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x-\frac{3\pi}{2}}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3\pi}{2}\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant $\frac{3\pi}{2}$ rencontre A, le calcul de la limite en $\frac{3\pi}{2}$ peut être envisagé.
Pour lever l'indétermination "$\frac{0}{0}$", appliquons le théorème de l'Hospital. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]\frac{3\pi}{2}-\varepsilon, \frac{3\pi}{2}+\varepsilon[\setminus\{\frac{3\pi}{2}\}$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, considérons $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ et $f_2 : x \mapsto x-\frac{3\pi}{2}$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables dans V
2) La dérivée de f_2 est non nulle dans V
3) On a $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\cos(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}(x-\frac{3\pi}{2}) = 0$
4) De plus, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{-\sin(x)}{1} = 1.$
Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 1.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+1}\,dx, \qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2}\operatorname{tg}^2(2x)\,dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x-1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ donc sur $[2, +\infty[$, ensemble non borné. De plus, elle est positive sur cet ensemble. Pour tout $t > 2$, cette fonction est donc intégrable sur $[2, t]$ et on a

$$\int_2^t \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x-1}\right]_2^t = \frac{-1}{t-1}+1.$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-1}{t-1}+1\right) = 1.$$

La limite précédente étant finie, f est intégrable sur $[2, +\infty[$ et son intégrale vaut 1.

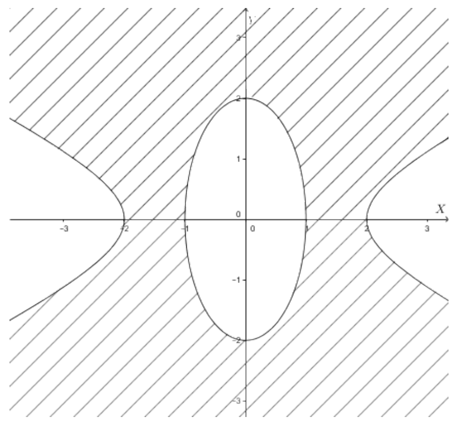
La fonction $x \mapsto \operatorname{tg}^2(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ donc intégrable sur cet ensemble. Comme $\operatorname{tg}^2(2x) = \dfrac{1}{\cos^2(2x)} - 1$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^2(2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x) - x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}.$$

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 4x^2 + y^2 \geq 4 \text{ et } x^2 - 4y^2 \leq 4\right\}.$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$4D^2 f(x) + f(x) = \sin(2x).$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $4D^2 f(x)+f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto 4z^2+1$ et ses zéros sont $-i/2$ et $i/2$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 e^{-ix/2} + c_2 e^{ix/2} = c_1' \cos(x/2) + c_2' \sin(x/2),\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2, c_1', c_2' sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme les coefficients de l'équation sont réels et que $\sin(2x) = \Im e^{2ix}$, cherchons une solution particulière F_P de $4D^2 f(x) + f(x) = e^{2ix}(*)$, une solution particulière de l'équation donnée sera alors $f_P = \Im F_P$.
La fonction $G : x \mapsto e^{2ix}$ est le produit d'un polynôme de degré 0 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 2i$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $F_P(x) = A\, e^{2ix},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Par dérivation, on a immédiatement

$$D^2 F_P(x) = -4A\, e^{2ix}$$

et en remplaçant dans l'équation $(*)$, on a

$$-15A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{15}.$$

Dès lors, $F_P(x) = -\frac{1}{15}\, e^{2ix} = -\frac{1}{15}(\cos(2x) + i\sin(2x))$ et $f_P(x) = \Im F_P(x) = -\frac{1}{15}\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 e^{-ix/2} + c_2 e^{ix/2} - \frac{1}{15}\sin(2x) = c_1' \cos(x/2) + c_2' \sin(x/2) - \frac{1}{15}\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2, c_1', c_2' sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
On achète 150 ***litres de lait chez un fermier. Pour vérifier s'il y a fraude, on pèse les*** 150 ***litres et on trouve*** $153,48$ ***kg. Trouver combien de litres de lait ont été remplacés par de l'eau si un litre de lait non frelaté pèse*** 1030 ***g.***

Solution. Soit x le nombre de litres d'eau ajoutés ; on a donc $(150 - x)$ litres de lait non frelaté. Comme $1030 \text{ g} = 1,03 \text{ kg}$, en ajoutant le poids de l'eau au poids du lait, on obtient

$$1\,x + 1,03(150 - x) = 153,48 \Leftrightarrow x - 1,03x = 153,48 - 154,50 \Leftrightarrow 0,03x = 1,02 \Leftrightarrow x = 34.$$

Le fermier a donc ajouté 34 litres d'eau au lait.