Mathématique
Examen du lundi 9 janvier 2017

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1.
(1.1) Enoncer le théorème de dérivation de la fonction inverse d'une fonction bijective et dérivable.
(1.2) En expliquant, en déduire le domaine de dérivabilité de la fonction arcsin ainsi que l'expression explicite de sa dérivée.

Théorie 2.
(2.1) Qu'est-ce qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 ?
(2.2) Donner la structure générale de l'ensemble des solutions d'une telle équation et justifier votre réponse.

Exercices

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(x) + \cos(3x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

(b) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\arccos(\cos(-1)) + \exp(\ln(e-1))$$

(c) Soient $z_1 = i^{75} - 1$ et $z_2 = i - 1$. Déterminer la partie réelle et le module du nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$.

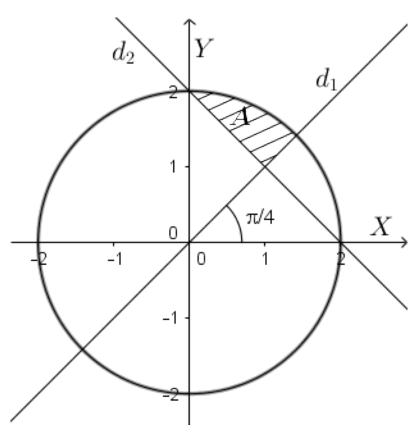
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes

$$(a)\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2x)}{\ln(1-x)}, \qquad (b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2-4}}{|2-3x|}.$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum

$$(a)\ \int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2}\, dx, \qquad (b)\ \int_0^1 \ln(x)\, dx.$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.



5. (a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+e^{-x}}$ vérifie l'équation différentielle

$$Df(x) = f(x)\ (1 - 2f(x)).$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - 2Df(x) + f(x) = \ e^x$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Une ligne droite de 1300 m relie les points A et B. Alex part du point A dans la direction du point B à la vitesse constante de 6 km/h. Béatrice part une minute plus tard du point B dans la direction de A, à la vitesse constante de 12 km/h. Combien de temps après son départ Alex rencontrera-t-il Béatrice ?

Exercice BIS (A résoudre par les étudiants qui ne bénéficient pas du bonus)
(a) Résoudre l'inéquation suivante (x est l'inconnue réelle)

$$|x^2 - 1| - x^2 < x + 1$$

(b) Si x désigne un réel de l'intervalle $]3\pi, 4\pi[$ et si $\operatorname{cotg}(x) = -\frac{1}{3}$, que valent les nombres

$$\operatorname{tg}(x),\ \sin(x),\ \cos(x)?$$

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.

(1.1) Enoncer le théorème de dérivation de la fonction inverse d'une fonction bijective et dérivable.

Solution. Voir cours p. 100 (version 2014-2015)

(1.2) En expliquant, en déduire le domaine de dérivabilité de la fonction arcsin ainsi que l'expression explicite de sa dérivée.

Solution. Voir cours p. 121-122 (version 2014-2015) en expliquant.

Théorie 2.

(2.1) Qu'est-ce qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 ?

Solution. Voir cours p. 161 (version 2014-2015)

(2.2) Donner la structure générale de l'ensemble des solutions d'une telle équation et justifier votre réponse.

Solution. Voir cours p. 161-162 (version 2014-2015)

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation suivante**

$$\cos(x) + \cos(3x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$, que $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ et que la fonction cos est paire, l'équation est équivalente à

$$2\cos(2x)\cos(x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x)\left(2\cos(x) - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ sont $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$.

(b) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\operatorname{arcos}(\cos(-1)) + \exp(\ln(e-1))$$

Solution. La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $[-1, 1]$; la fonction arcos est définie sur $[-1, 1]$. Dès lors, le premier terme de l'expression donnée est défini. Pour le deuxième terme, on a $e - 1 > 0$, la fonction ln définie sur $]0, +\infty[$ et la fonction exp définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi le deuxième terme de l'expression est défini et la somme l'est aussi et on a

$$\operatorname{arcos}(\cos(-1)) + \exp(\ln(e-1)) = \operatorname{arcos}(\cos(1)) + e - 1 = 1 + e - 1 = e$$

car la fonction cos est paire, l'image de arcos est $[0, \pi]$, les fonctions arcos et cos d'une part et exp et ln d'autre part sont inverses l'une de l'autre.

(c) Soient $z_1 = i^{75} - 1$ et $z_2 = i - 1$. Déterminer la partie réelle et le module du nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$.

Solution. Puisque $i^{75} = i^{72} \cdot i^3 = -i$, on a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-i-1}{i-1} = \frac{(-i-1)^2}{(i-1)(-i-1)} = \frac{i^2+2i+1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i.$$

La partie réelle de $\frac{z_1}{z_2}$ vaut donc 0.
Son module vaut

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(a) \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(2x)}{\ln(1-x)}, \qquad (b) \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 4}}{|2 - 3x|}.$$

Solution. (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\ln(1-x)}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0 \text{ et } \ln(1-x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ et } 1 - x \neq 1\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[.$$

Tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $A \cap]-\infty, 0[\,=]-\infty, 0[$. Le calcul de la limite en 0^- peut donc être envisagé. Comme

$$\lim_{x \to 0^-} \sin(2x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^-} \ln(1-x) = \ln(1) = 0,$$

on a une indétermination $\frac{0}{0}$. Pour lever cette indétermination, on utilise le théorème de l'Hospital dont on vérifie les hypothèses.
Considérons $V =]-\varepsilon, 0[$ $(\varepsilon > 0)$ ainsi que les fonctions $g : x \mapsto \sin(2x)$ et $h : x \mapsto \ln(1-x)$. On a
1) g et h dérivables dans V
2) $Dh(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1} \neq 0$ dans V
3) $\lim\limits_{x \to 0^-} \sin(2x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} \ln(1-x)$
4) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2\cos(2x)}{(x-1)^{-1}} = \lim\limits_{x \to 0^-} [2\cos(2x)(x-1)] = -2$
Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite cherchée vaut -2.

(b) La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{9x^2-4}}{|2-3x|}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 9x^2 - 4 \geq 0,\ |3-2x| \neq 0\} = \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[.$$

Cet ensemble n'étant pas minoré, la limite de la fonction en $-\infty$ peut être envisagée et on a

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2-4}}{|2-3x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2}}{|3x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|3x|}{|3x|} = 1.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(a) \int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2}\, dx, \qquad\qquad (b) \int_0^1 \ln(x)\, dx.$$

Solution. (a) La fonction $f : x \mapsto x\, e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $[0, +\infty[$ ensemble non borné et elle est positive sur cet intervalle.
Pour tout $t > 0$, la fonction f, continue sur $[0, t]$, est intégrable sur $[0, t]$ et on a

$$\int_0^t x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int_0^t (-2x)\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int_0^t D(-x^2)\, e^{-x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^t = -\frac{1}{2}(e^{-t^2} - 1).$$

Dès lors,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} (e^{-t^2} - 1) = \frac{1}{2}.(*)$$

En effet, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} (-t^2) = -\infty$ et l'application du théorème de la limite d'une fonction composée donne

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t^2} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0.$$

Comme la fonction f est à valeurs positives sur $[0, +\infty[$ et que la limite $(*)$ est finie, la fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ et la valeur de son intégrale sur cet ensemble vaut $\frac{1}{2}$.

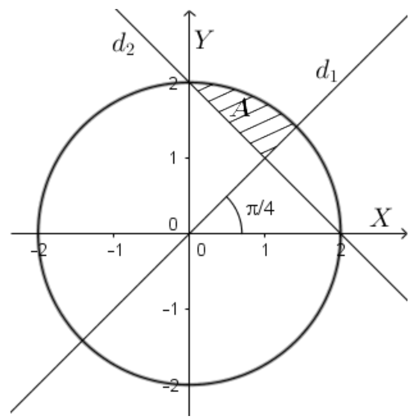
(b) La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc sur $]0, 1]$, ensemble non fermé ; de plus, elle est négative sur cet ensemble.

Pour tout $t \in]0, 1]$, la fonction f, continue sur $[t, 1]$, est intégrable sur $[t, 1]$ et, par une intégration par parties, on a

$$\int_t^1 |\ln(x)|\, dx = \int_t^1 -\ln(x)\, dx = -\Big[x \ln(x)\Big]_t^1 + \int_t^1 1\, dx = \Big[x(-\ln(x) + 1)\Big]_t^1 = 1 + t(\ln(t) - 1).$$

Dès lors,
$$\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 |\ln(x)|\ dx = \lim_{t\to 0^+}(1+t(\ln(t)-1)) = 1.(**)$$
En effet, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} t = 0$ et, les hypothèses du théorème de l'Hospital étant vérifiées, en appliquant ce théorème à la fonction $t \mapsto t\ln(t) = \frac{\ln(t)}{t^{-1}}$, on a
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{D\ln(t)}{D\,t^{-1}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^{-1}}{-t^{-2}} = -\lim_{t\to 0^+} t = 0$$
et donc $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$.
Comme la limite $(**)$ est finie, la fonction f est intégrable sur $]0,1]$ et comme cette fonction est à valeurs négatives sur $]0,1]$, la valeur de son intégrale sur cet ensemble vaut -1.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.**



Solution.

Le cercle de rayon 2 centré au point de coordonnées $(0,0)$ a pour équation cartésienne $x^2+y^2=4$, la droite d_1 a pour équation $y=x$ et la droite d_2 a pour équation $y=-x+2$. Le point d'intersection des deux droites a pour coordonnées $(1,1)$ et l'ordonnée du point d'intersection entre le cercle de d_1 vaut $\sqrt{2}$. Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par
$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\left[1,\sqrt{2}\right],\ x\in[2-y,y]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\left[\sqrt{2},2\right],\ x\in\left[2-y,\sqrt{4-y^2}\right]\right\}.$$

5. **(a) Montrer que la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{2+e^{-x}}$ vérifie l'équation différentielle**
$$Df(x) = f(x)\ (1-2f(x)).$$

Solution. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$Df(x) = -(2+e^{-x})^{-2}\ .\ D(2+e^{-x}) = -(2+e^{-x})^{-2}\ .\ (-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(2+e^{-x})^2}.$$
On a aussi
$$f(x)\ (1-2f(x)) = \frac{1}{2+e^{-x}}\ \left(1-\frac{2}{2+e^{-x}}\right) = \frac{1}{2+e^{-x}}\ \left(\frac{2+e^{-x}-2}{2+e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{(2+e^{-x})^2}$$
et, dès lors, la fonction f vérifie bien l'équation donnée.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) - 2Df(x) + f(x) = e^x$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène. Son second membre est continu sur $\mathbb{R}$; on résout donc l'équation sur $\mathbb{R}$.
L'équation homogène associée est $D^2f(x) - 2Df(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 - 2z + 1$ dont le zéro double est 1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$(c_1x + c_2)\, e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière de $D^2f(x) - 2Df(x) + f(x) = e^x$ (*).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle-polynôme $x \mapsto 1\ .\ e^x$, produit d'un polynôme de degré 0 et de e^x dont le coefficient 1 de la variable est solution double de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = A\ x^2\, e^x,\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme $Df_P(x) = (2Ax + Ax^2)e^x$ et $D^2f_P(x) = (2A + 4Ax + Ax^2)e^x$, en remplaçant dans (*) et en divisant les 2 membres par $e^x \neq 0$ pour tout x, on a

$$2A + 4Ax + Ax^2 - 4Ax - 2Ax^2 + Ax^2 = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f_P(x) = \dfrac{x^2}{2}\, e^x,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$\left(c_1x + c_2 + \frac{x^2}{2}\right)\, e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Une ligne droite de 1300 m relie les points A et B. Alex part du point A dans la direction du point B à la vitesse constante de 6 km/h. Béatrice part une minute plus tard du point B dans la direction de A, à la vitesse constante de 12 km/h. Combien de temps après son départ Alex rencontrera-t-il Béatrice ?

Solution. Une vitesse de 6 km/h correspond à 6000 m/60 min = 100 m/min et donc celle de 12 km/h correspond à 200 m/min.
Soit t le temps en minutes mis par Alex pour rencontrer Béatrice et $t-1$ le temps en minutes mis par Béatrice pour rencontrer Alex. La distance en mètres parcourue par Alex vaut $100t$ et celle parcourue par Béatrice vaut $200(t-1)$. Ensemble ils parcourent 1 300 m. Dès lors, le problème se traduit par l'équation suivante qu'il faut résoudre. On a successivement

$$100t + 200(t-1) = 1300 \Leftrightarrow 300t - 200 = 1300 \Leftrightarrow 300t = 1500 \Leftrightarrow t = 5.$$

Ainsi Alex rencontrera Béatrice 5 minutes après son départ.

$\boxed{\textbf{\textit{Exercice BIS}}}$ (A résoudre par les étudiants qui ne bénéficient pas du bonus)

(a) Résoudre l'inéquation suivante (x est l'inconnue réelle)

$$|x^2 - 1| - x^2 < x + 1$$

Solution. Cette inéquation est définie pour tout réel x.
Si $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq -1$ ou $x \geq 1)$, l'inéquation s'écrit $x^2 - 1 - x^2 < x + 1 \Leftrightarrow x > -2$ et l'ensemble des

solutions est $S_1 =]-2,-1] \cup [1,+\infty[$.
Si $x^2-1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$, l'inéquation s'écrit

$$-x^2+1-x^2 < x+1 \Leftrightarrow 2x^2+x > 0 \Leftrightarrow x(2x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1/2 \text{ ou } x > 0$$

et l'ensemble des solutions est $S_2 = [-1,-\frac{1}{2}[\cup]0,1]$.

Dès lors, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = S_1 \cup S_2 =]-2,-\frac{1}{2}[\cup]0,+\infty[$.

(b) Si x désigne un réel de l'intervalle $]3\pi, 4\pi[$ et si $\mathrm{cotg}(x) = -\frac{1}{3}$, que valent les nombres

$$\mathrm{tg}(x),\ \sin(x),\ \cos(x)?$$

Solution. Comme on travaille dans le quatrième quadrant, $\sin(x)$ et $\mathrm{tg}(x)$ sont négatifs tandis que $\cos(x)$ est positif.
Puisque $\mathrm{tg}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{cotg}(x)}$ si $x \in \left]\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right[$, on a $\mathrm{tg}(x) = -3$.
Vu l'égalité $\mathrm{cotg}^2(x)+1 = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ si $x \in \left]\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right[$, on a $\sin^2(x) = \frac{1}{1+1/9} = \frac{9}{10}$ et donc $\sin(x) = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$.
Ainsi, $\cos(x) = \mathrm{cotg}(x)\ .\ \sin(x) = (\frac{-1}{3})\ .\ (-\frac{3\sqrt{10}}{10}) = \frac{\sqrt{10}}{10}$.