Mathématique
Interrogation du lundi 7 novembre 2016

QUESTIONNAIRE

Théorie

(1) Partie calcul vectoriel
Quelle est la définition (géométrique) du produit vectoriel de deux vecteurs ?

(2) Partie équation et nombres complexes
On donne le complexe b et on suppose que $b \neq 2$ et $b \neq -2$. Démontrer que l'expression $z^2 + bz + 1$ s'annule pour deux valeurs distinctes de z, et pas plus.

Exercices

1. Déterminer les solutions réelles (x) de l'inéquation suivante

$$|1 - 2x^2| > x.$$

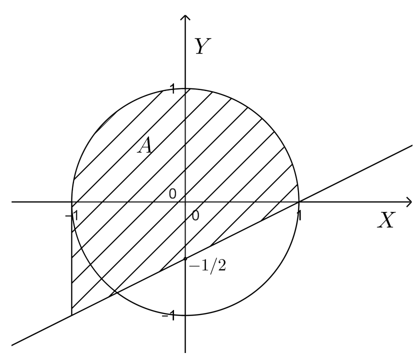
2. Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation

$$1 + \sin(x) = \cos(x).$$

3. Les expressions suivantes existent-elles ? Si oui, les simplifier au maximum.
(1) $2 \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.
(2) $\ln(2e^2) - \sqrt{(-5)^2}$.

4. Déterminer le module et la partie imaginaire du complexe $z = (1 - i)^2$.

5. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.



6. ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***

Si on compte les arbres d'un verger par groupes de 8, il en reste 5, et si on les compte par groupes de 7, il en reste 2. Sachant que le nombre de groupes de 7 surpasse de 3 celui des groupes de 8, combien d'arbres y a-t-il dans ce verger ?

CORRIGE

Théorie

(1) **Partie calcul vectoriel**

Quelle est la définition (géométrique) du produit vectoriel de deux vecteurs ?

Solution. Voir cours

(2) **Partie équation et nombres complexes**

On donne le complexe b et on suppose que $b \neq 2$ et $b \neq -2$. Démontrer que l'expression $z^2 + bz + 1$ s'annule pour deux valeurs distinctes de z, et pas plus.

Solution. Voir cours

Exercices

1. **Déterminer les solutions réelles (x) de l'inéquation suivante**

$$|1 - 2x^2| > x.$$

Solution. Si x est négatif ou nul, l'inéquation est vérifiée puisque le premier membre est strictement positif et le second négatif ou nul. Dès lors, on a pour ensemble de solutions $S_1 =]-\infty, 0]$.
Envisageons $x > 0$. Comme $1 - 2x^2 \geq 0$ si $x \in]0, \sqrt{2}/2]$, dans cet intervalle l'inéquation s'écrit $1 - 2x^2 > x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 < 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 1) < 0$ et on a pour ensemble de solutions $S_2 =]0, 1/2[$.
Enfin, quand $x > \sqrt{2}/2$, $|1-2x^2| = 2x^2 - 1$ et l'inéquation s'écrit $2x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) > 0$; on a pour ensemble de solutions $S_3 =]1, +\infty[$.
Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]-\infty, 1/2[\cup]1, +\infty[$.

2. **Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation**

$$1 + \sin(x) = \cos(x).$$

Solution. Cet exercice est tiré de la liste 3 du fascicule d'exercices pour les répétitions : c'est l'exercice III.8 a)
L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et, puisque $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, elle est équivalente à

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{4} - x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ sont $\frac{3\pi}{2}$, 2π.

3. **Les expressions suivantes existent-elles ? Si oui, les simplifier au maximum.**

(1) $2\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$.

(2) $\ln(2e^2) - \sqrt{(-5)^2}$.

Solution. (1) La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $[-1,1]$; de plus, puisque la fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$, le premier terme de l'expression donnée est défini.
La fonction tg est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ et son image est $\mathbb{R}$; de plus, puisque la fonction arctg est définie sur $\mathbb{R}$, le deuxième terme de l'expression donnée est défini donc l'expression est définie.

On a $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$ car $\mathrm{im}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$ car $\mathrm{im}(\operatorname{arctg}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Ainsi

$$2\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = 2\ \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

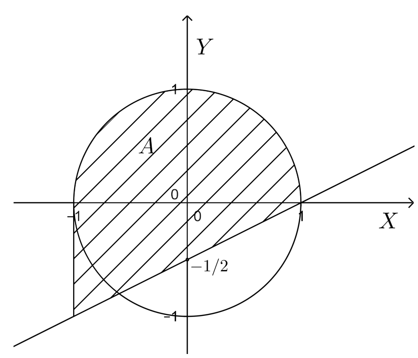
(2) La fonction ln est définie sur les réels strictement positifs et la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$. L'expression donnée est donc définie.
Comme $\ln(xy) = \ln(x)\ .\ \ln(y),\ x,y>0$ et $\ln(e)=1$, on a

$$\ln(2e^2) - \sqrt{(-5)^2} = \ln(2) + 2 - \sqrt{25} = \ln(2) - 3.$$

4. **Déterminer le module et la partie imaginaire du complexe** $z = (1-i)^2$.

Solution. On a $z = 1 - 2i + i^2 = -2i$.
Ainsi, $\Re z = 0$ et $\Im z = -2$. Dès lors, $|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$ et la partie imaginaire de z vaut -2.

5. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.**



Solution. Le cercle a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$ et celle de la droite qui passe par les points de coordonnées (1,0) et (0,-1/2) est $x - 2y - 1 = 0$.
Le point d'abscisse -1 de la droite a pour ordonnée -1.
Dès lors, l'ensemble donné est décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-1,0]\,,\ x\in[-1,2y+1]\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,1]\,,\ x\in\left[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\right]\right\}.$$

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Si on compte les arbres d'un verger par groupes de 8, il en reste 5, et si on les compte par groupes de 7, il en reste 2. Sachant que le nombre de groupes de 7 surpasse de 3 celui des groupes de 8, combien d'arbres y a-t-il dans ce verger ?

Solution. Ce problème est le problème 17 du premier chapitre du syllabus d'exercices.
Soit x le nombre de groupes de 8 arbres du verger et donc $x+3$ le nombre de groupes de 7 arbres.
Le nombre d'arbres du verger est donc $8x+5$ ou $7(x+3)+2$.
Dès lors, on a l'équation $8x + 5 = 7x + 23 \Leftrightarrow x = 18$.
Ainsi, le verger comprend $8\ .\ 18 + 5 = 144 + 5 = 149$ arbres.