
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2016-2017

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
EXERCICES RÉCAPITULATIFS

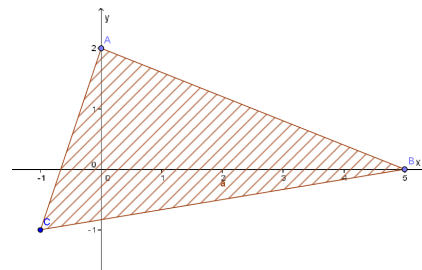
Exercices divers

- Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [\pi, 3\pi]$)
 - $3x|x-2| = x-2$
 - $\frac{|1-x|}{x^2-1} \geq x-1$
 - $\cos(3x) - \sin(x) = 0$
 - $\sin(2x) \leq \sin(x)$
- Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :
 - $\cos(\ln(e^{-2\pi/3})) + \sin(\operatorname{tg}(3\pi/4))$
 - $\arcsin(1 - \cos(7\pi/6)) + \arccos(\cos(4\pi/3))$
- Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(-1, 0, 3)$, $B(1, 2, -1)$ et $C(4, 1, 2)$. Calculer
 - $3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
 - les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$
 - les composantes de la projection orthogonale de \overrightarrow{AC} sur \overrightarrow{BC} .
- Si elles existent, déterminer les limites suivantes
 - $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2x+3)}{x+1}$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}}$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3-1}{-2x}\right)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-3x)-1}{2x}$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(-5x-1) - \ln|ex|)$
 - $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 1}$
- Où la fonction $x \mapsto \arcsos(\sqrt{1-x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.
- Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.
 - $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x} dx$
 - $\int_{-\infty}^0 xe^{3x} dx$
 - $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{2-x} dx$
 - $\int_{-4}^4 \sqrt{x^2} dx$
 - $\int_4^5 \frac{2}{x(x^2-6x+9)} dx$
- Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} .
 - $x^2 + 2 = -ix$
 - $27 + x^3 = 0$
- Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq x^2 \geq 1 - 9y^2\}.$$

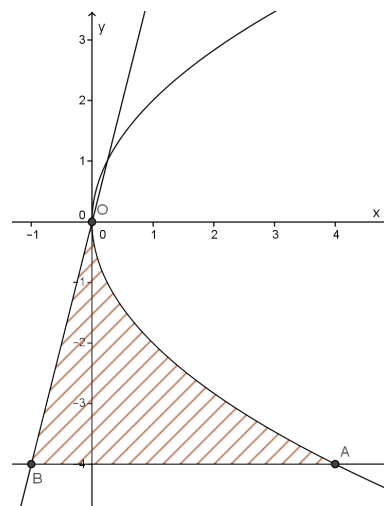
9. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

- (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
- (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



10. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

- (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
- (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



11. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)

$$a) D^2 f(x) + f(x) = e^{ix} \quad b) 9D^2 f(x) + 6Df(x) + f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

Problèmes élémentaires

1. La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par
 - (a) $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$ si cette voiture est équipée de freins normaux
 - (b) v si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.
 Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.
2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 points comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?

Maths en sciences

1. La pression de la vapeur d'eau saturée dépend de la température suivant une loi de la forme $p = aT^2 + bT + c$ (a, b, c étant réels). Nous disposons des valeurs suivantes :

T (C)	0	10	20
p (Torr)	4.6	9.2	17.5

Calculer les coefficients a, b et c .

2. Il a été prouvé expérimentalement que le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la formule $m(t) = m_0 e^{-0,000436 t}$, où m_0 représente la masse initiale du radium et $m(t)$ sa masse après t années. Calculer la "période de désintégration" du radium, c'est-à-dire le laps de temps pendant lequel se désintègre la moitié de la masse initiale (N.B. : $\ln 2 \approx 0,7$).

3. Un point matériel se déplace à la vitesse $v = 2t + 4$ cm/s. Calculer la distance parcourue après les 10 premières secondes si le temps t est exprimé en secondes.
4. En physique, le travail exercé par une force F pour déplacer un point matériel d'un point P_1 , situé à une distance d_1 de son point d'application, à un point P_2 , situé à une distance d_2 de son point d'application, est donné par l'intégrale suivante :

$$W = \int_{d_1}^{d_2} F(x)dx.$$

Fort de ce constat, soient deux charges électrique $e_1 = 1$ et $e_2 = e$, distantes entre elles de x . La loi de Coulomb affirme que la charge e agit sur la charge unité avec une force de valeur absolue égale à $\frac{e}{x^2}$. Calculer le travail W de cette force lorsque la charge unité se déplace d'un point P_1 situé à la distance r de cette charge e jusqu'à un autre point P_2 où l'éloignement devient égal à R . En déduire le potentiel de la charge e au point P_1 (sachant que le potentiel est égal à la limite du travail W lorsque R tend vers $+\infty$).

5. Soit un ressort à boudin qui s'allonge de 1 mm pour un effort de traction de 30 N. Calculer le travail qu'il faut développer pour allonger le ressort de 20 mm, sachant que la force de traction est à chaque instant proportionnelle au déplacement.

QCM

1. Le carré d'un nombre complexe est toujours
 - (a) un nombre positif
 - (b) un nombre négatif
 - (c) un nombre imaginaire pur
 - (d) aucune réponse correcte
2. La partie réelle du produit de deux nombres complexes est toujours égale
 - (a) au produit des parties réelles de ces nombres
 - (b) à la somme des parties réelles de ces nombres
 - (c) à la somme de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
 - (d) au produit de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
 - (e) aucune réponse correcte
3. La valeur absolue de la somme de deux réels est toujours
 - (a) inférieure ou égale à la différence entre les valeurs absolues de ces réels
 - (b) inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
 - (c) supérieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
 - (d) supérieure ou égale à la moitié du produit de ces réels
 - (e) aucune réponse correcte
4. Si f est définie sur \mathbb{R} , le graphique de $F(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ est
 - (a) le symétrique du graphique de f par rapport à la première bissectrice
 - (b) le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe X
 - (c) le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe Y
 - (d) le symétrique du graphique de f par rapport à l'origine
 - (e) aucune réponse correcte
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x|^3 < |x|^2$ est l'ensemble
 - (a) $[-1, 1[$
 - (b) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
 - (c) $] - 1, 1[\setminus \{0\}$
 - (d) $] - \infty, -1[$
 - (e) aucune réponse correcte

6. Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type $y = mx + p$
 - (a) vrai
 - (b) faux
7. Le cube d'un réel non nul et de son opposé sont toujours égaux
 - (a) vrai
 - (b) faux
8. Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci.
 - (a) vrai
 - (b) faux
9. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante
 - (a) vrai
 - (b) faux
10. Le domaine de définition de la fonction donnée par $\cos(\cos x)$ est l'intervalle $[-1,1]$
 - (a) vrai
 - (b) faux