
1, 2, 3...Sciences

Année académique 2016-2017

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
EXERCICES DE RÉVISION EN VUE DE L'INTERROGATION DU 7/11/2016

Problèmes élémentaires

1. Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente de $1/15$. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir $3,36 \text{ m}^3$ de glace ?
2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient un point. S'il ne répond pas, il a 0 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il ne répond pas à 13 questions et qu'il obtient 45,75 comme cote finale, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?
3. Un tonneau rempli aux trois cinquièmes d'eau pèse 125 kg. Rempli aux trois quarts d'eau, il pèse 137 kg. Quelle est la capacité en hectolitres de ce tonneau ?

Manipulations de réels

Résoudre les équations et inéquations suivantes (x est une inconnue réelle)

1. $|4x^2 - 1| = |3x|$
2. $x^2 - 9 \geq 3x|x - 3|$
3. $x \geq 27x^4$
4. $|x - 3| \geq |x + 3|$
5. $(3 - x)^2 \leq x - 3$
6. $x|x^2 - 9| \leq 4|x - 3|$
7. $\frac{|3 - x|}{x^2 - 9} \geq |x - 3|$
8. $|x^2 - 9| \geq 5$
9. $\frac{1}{|2x + 5|} > 3$

Calcul vectoriel et droites

1. Dans un repère orthonormé, on donne les droites d_1 , d_2 et d_3 dont les équations cartésiennes sont

$$d_1 : 2x - y + 3 = 0 \quad d_2 : 5x + 2y - 12 = 0 \quad d_3 : x + 4y - 24 = 0.$$

- (a) Représenter ces 3 droites.
 - (b) Les droites d_1 et d_2 se coupent au point A . Déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par A et orthogonale à d_3 .
 - (c) Donner des équations paramétriques de d_3 .
 - (d) Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la droite d_2 avec l'axe des abscisses.
 - (e) Le point C de coordonnées $(4, 5)$ appartient-il à d_1 ? à d_2 ? à d_3 ?
 - (f) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC}$.
 - (g) Déterminer les composantes de la projection orthogonale de \overrightarrow{AB} sur d_1 .
2. Dans un repère orthonormé, on donne les points A , B et C dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement

$$(-1, 1, 0) \quad (2, -1, 3) \quad (0, -4, 2).$$

Déterminer les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge 2\overrightarrow{BC}$

Trigonométrie

1. Si α désigne un réel de l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ et si $\text{tg}(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, que valent les nombres $\text{cotg}(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$?
2. Simplifier $\frac{\cos(\frac{4\pi}{3})}{\sin^2(\frac{7\pi}{3})}$.

3. Résoudre dans $[\pi, 2\pi]$ (x est une inconnue réelle)

- (a) $\sin(2x) \cos(2x) = -1$
- (b) $4 \sin(2x) \cos(2x) = -1$
- (c) $\sin(2x) = \sin(6x)$
- (d) $4 \cos^2(2x) = 3$
- (e) $2 \cos^2(2x) = \sin^2(4x)$
- (f) $\sin(x) \sin(2x) = \cos(2x) \cos(x) + \frac{1}{2}$

Coniques et représentations d'ensembles

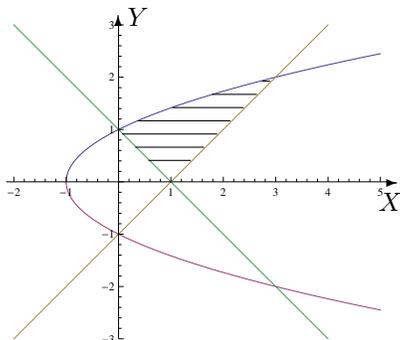
1. On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques ? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) ? Quelle est leur excentricité ?

$$x^2 - 1 = 4y^2 \qquad x^2 + 3y^2 = 12.$$

2. Représenter dans un repère orthonormé en le hachurant l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + 4x \geq 0 \text{ et } y \leq 4 - x^2\}.$$

3. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant



- a) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.
- b) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.

Nombres complexes

- 1. On donne le complexe $z = 1 + i$.
 - a) En déterminer le module et une forme trigonométrique. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé ($X = \text{“axe réel”}$ et $Y = \text{“axe imaginaire”}$)
 - b) Que vaut la partie réelle du complexe z^2 ?
 - c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe ? Pourquoi ?
- 2. Déterminer
 - a) le module du complexe $\cos(2) + i \sin(2)$
 - b) les parties réelle et imaginaire du complexe $z = \frac{1}{1-2i}$.
- 3. Résoudre dans \mathbb{C}

$$a) z^2 - z + 1 = 0 \qquad b) z^2 + 25 = 0$$

Fonctions élémentaires

Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

- 1. $\arcsin \left(\sin \left(\frac{-4\pi}{7} \right) \right)$
- 2. $\cos \left(\arcsin \left(\frac{7}{8} \right) \right)$

3. $\ln(e^3 \cos(\frac{-\pi}{3})) + \ln(\sqrt{(-2)^2})$

4. $e^{-i\pi/2}$

5. $\exp(\ln(\pi) + \ln(\sqrt{2}))$

Fractions simples

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en une somme de fractions simples à coefficients réels

1. $\frac{1}{x^2 - 1}$

2. $\frac{x - 1}{x^3 + x}$