Université de Liège

1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales : partim B'

Répétition 1* : Physique

Correction

Version 15 mars 2017

Répétition 1* : compléments d'algèbre linéaire et compléments sur les équations différentielles (1)

I. Représentation d'un opérateur linéaire dans une base, changement de base

1. **Soit l'opérateur**
$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x-2y \\ -5x+y \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que cet opérateur est linéaire.

Il l'est vu la linéarité des opérations matricielles :
$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ T\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \lambda T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

(b) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base constituée des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ de composantes respectives $(1,0)$, $(0,1)$ (appelée *base canonique* du plan) de $\mathbb{R}^2$.

L'opérateur T est représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Vérifier que les vecteurs
$$\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \qquad \vec{e'}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$
constituent une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est de dimension deux et ces vecteurs sont linéairement indépendants puisque
$$\det(\vec{e'}_1\ \vec{e'}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Donc, les vecteurs $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ constituent bien une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

(d) Déterminer la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

La matrice de changement de base est donnée par $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base $\mathcal{B}'$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, l'opérateur T est représenté par la matrice $A' = S^{-1}AS$. Comme $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, T est donc représenté par la matrice $A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

(f) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2$ formant une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle T est représenté par une matrice diagonale.

Pour ce faire, il faut diagonaliser la matrice A. Ses valeurs propres étant 3 et -4, toutes deux simples, A est diagonalisable : ces valeurs propres admettent respectivement les vecteurs propres linéairement indépendants $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de sorte que, pour $S' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S'^{-1}AS' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Dès lors, S' est la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et la base $\mathcal{B}''$ formée des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2$ de composantes respectives (dans $\mathcal{B}$) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire des vecteurs

$$\vec{e''}_1 = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 \qquad , \qquad \vec{e''}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

dans laquelle l'opérateur T est représenté par la matrice diagonale $S'^{-1}AS' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

2. **Soit l'opérateur**

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y+z \\ -6x+4y+2z \\ 3x-y+z \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que cet opérateur est linéaire.

Il l'est vu la linéarité des opérations matricielles :
$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\ T\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) = \lambda T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) \end{array} \right.$$

(b) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

L'opérateur T est représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Vérifier que les vecteurs

$$\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \qquad \vec{e'}_2 = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \qquad \vec{e'}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

constituent une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension trois et ces vecteurs sont linéairement indépendants puisque

$$\det(\vec{e'}_1 \ \vec{e'}_2 \ \vec{e'}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Donc, les vecteurs $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$ constituent bien une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

(d) Déterminer la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

La matrice de changement de base est donnée par $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base $\mathcal{B}'$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, l'opérateur T est représenté par la matrice $A' = S^{-1}AS$. Comme $S^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

T est donc représenté par la matrice $A' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -8 & 40 & -10 \\ -2 & 16 & -1 \\ 8 & -16 & 16 \end{pmatrix}$.

(f) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2, \vec{e''}_3$ formant une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle T est représenté par une matrice diagonale.

Pour ce faire, il faut diagonaliser la matrice A. Ses valeurs propres sont 0 (simple) et 2 (double). La valeur propre 2 admet des vecteurs propres de la forme

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ne sont pas simultanément nuls, ce qui implique que A est diagonalisable. Cette matrice admet les vecteurs propres linéairement indépendants $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, de sorte que, pour $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $S'^{-1}AS' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dès lors, S' est la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et la base $\mathcal{B}''$ formée des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2, \vec{e''}_3$ de composantes respectives (dans $\mathcal{B}$) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire des vecteurs

$$\vec{e''}_1 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \qquad , \qquad \vec{e''}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \qquad \vec{e''}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

dans laquelle l'opérateur T est représenté par la matrice diagonale $S'^{-1}AS' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. **On considère le plan muni du repère orthonormé $(O; \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base canonique du plan et on note cet espace vectoriel E. Soit le vecteur**

$$\vec{b} = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\|}$$

et l'opérateur

$$\mathcal{P} : E \to E, \ \vec{x} \mapsto (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{b}.$$

(a) Cet opérateur est-il linéaire ?

Oui : puisque le produit scalaire est linéaire, il vient que

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E \ : \ \mathcal{P}(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda\mathcal{P}(\vec{x}) + \mu\mathcal{P}(\vec{y}).$$

(b) Si oui, en déterminer la représentation matricielle P dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Cette matrice P est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, en déterminer une forme diagonale P' ainsi qu'une matrice S y conduisant.
Interpréter le passage de P à P' et caractériser la base dans laquelle $\mathcal{P}$ est représenté par P'.

Dans la base canonique du plan, cette opération est représentée par la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de la matrice A sont 0 et 1, toutes deux simples, et donc A est diagonalisable. Les vecteurs propres associés à 0 et 1 sont respectivement de la forme

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{C}_0 \qquad \text{et} \qquad \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \beta \in \mathbb{C}_0,$$

de sorte que, en posant $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
De manière générale, toute matrice S ainsi construite (sur base de vecteurs propres de A) est une

matrice de changement de base permettant de passer de la base canonique de départ, dans laquelle l'opération est représentée par A, à une nouvelle base dans laquelle l'opération est représentée par une matrice diagonale.

(c) A quoi correspond concrètement l'image d'un vecteur quelconque par cet opérateur ?
Il s'agit de la projection orthogonale du vecteur sur la première bissectrice du plan.

II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle sur lequel on travaille (f est une fonction de la variable réelle x).

(a) $D^3f(x) - 12Df(x) + 16f(x) = 32x - 8$

(b) $D^3f(x) + 2D^2f(x) - Df(x) - 2f(x) = e^x + x^2$

(c) $D^2f(x) - 2Df(x) + 3f(x) = \sin(x)$

(d) $D^3f(x) + Df(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

Les solutions générales des EDLCC sont données par

(a) $f(x) = (C_1 + C_2x)\, e^{2x} + C_3e^{-4x} + 2x + 1, \;\; x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{4} + \dfrac{x}{6}e^x, \; x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = e^x \left(C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)\right) + \dfrac{1}{4}\left(\sin(x) + \cos(x)\right), \; x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} + C_1 + (C_2 + \ln|\cos(x)|)\cos(x) + (C_3 + x - \mathrm{tg}(x))\sin(x), \; x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes complexes arbitraires.

III. Equations d'Euler

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $]0,+\infty[$ (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $x^2D^2f(x) + xDf(x) + f(x) = 1$

(b) $x^2D^2f(x) - xDf(x) + f(x) = x$

(c) $x^3D^2y - x^2Dy - 3xy + 16\ln(x) = 0$

Les solutions générales sont données par

(a) $f(x) = C_1\cos(\ln(x)) + C_2\sin(\ln(x)) + 1, \quad x \in]0,+\infty[,$

(b) $f(x) = x\left(C_1 + C_2\ln(x) + \dfrac{\ln^2(x)}{2}\right), \quad x \in]0,+\infty[,$

(c) $y(x) = C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x} + 2\dfrac{\ln^2(x)}{x}, \quad x \in]0,+\infty[,$

où C_1, C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

IV. Equations différentielles à second membre linéaire

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant le domaine sur lequel on travaille (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $(1+x^2)Dy(x) - 2xy(x) = (1+x^2)^2$

(b) $Df(x) + 2xf(x) = 2xe^{-x^2}$

(c) $xDy(x) + y(x) = -x^3$

(d) $x^3Df(x) + (2-3x^2)f(x) = x^3$, $\quad f(1) = \frac{1}{2}$

(e) $xDy(x) + 1 = \dfrac{1}{\ln(x)}y(x)$, $\quad y(e) = 1$

(f) $Df(x) = \sin(x) - \operatorname{cotg}(x)f(x)$, $\quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Les solutions générales de ces équations différentielles sont données par

(a) $y(x) = (C+x)(1+x^2),\ x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = (C+x^2)e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = \dfrac{C}{x} - \dfrac{x^3}{4},\ x \in \mathbb{R}_0$

(d) $f(x) = Cx^3 \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{x^3}{2},\ x \in \mathbb{R}_0$

(e) $y(x) = (C - \ln|\ln(x)|)\ln(x),\ x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

(f) $f(x) = \dfrac{2x - \sin(2x) + 4C}{4\sin(x)},\ x \in I = \mathbb{R}\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

où C est une constante complexe arbitraire.
Pour les points (d), (e) et (f), les solutions uniques des problèmes sont respectivement

$$f(x) = \frac{x^3}{2},\ x \in]0,+\infty[, \quad y(x) = (1-\ln(\ln(x)))\ln(x),\ x \in]1,+\infty[, \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x-\sin(2x)}{4\sin(x)},\ x \in]0,\pi[.$$

Remarque : La solution générale de (d) est valable sur $\mathbb{R}_0 =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, mais comme la condition initiale est donnée en $x_0 = 1 \in\ ]0,+\infty[$, la solution du problème est valable uniquement sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
Pareillement, la solution générale de (e) est valable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, mais comme la condition initiale est donnée en $x_0 = e \in\ ]1,+\infty[$, la solution du problème est valable uniquement sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
Encore, la solution générale de (f) est valable sur $I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, \pi + k\pi[$, mais comme la condition initiale est donnée en $x_0 = \frac{\pi}{2} \in]0,\pi[$, la solution du problème est valable uniquement sur l'intervalle $]0,\pi[$.

V. Equations exactes

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille (f et u sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $xDf(x) + f(x) + x^3 = 0$

(b) $\ln(x)Du + \dfrac{u}{x} = \dfrac{3}{x}\ln^2(x)$

(c) $Du = -\dfrac{3x^2u - u^3}{x^3 - 3xu^2}$

(d) $Df(x) = -\dfrac{f(x)\cos(xf(x)) + 2x}{x\cos(xf(x))}$

(e) $x^2Df(x) + 4f(x)Df(x) + 2xf(x) - 1 = 0$

Les solutions générales sont données par

(a) $f(x) = \dfrac{C}{x} - \dfrac{x^3}{4},\ x \in \mathbb{R}_0$

(b) $u(x) = \dfrac{C}{\ln(x)} + \ln^2(x),\ x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$

(c) $x^3u(x) - xu^3(x) = C$

(d) $\sin(xf(x)) + x^2 = C$

(e) $2f^2(x) + x^2f(x) - x = C$

où C est une constante complexe arbitraire.