1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales : partim B'

Répétition 2* : Physique

Correction

Version 27 mars 2017

Répétition 2* : compléments sur les équations différentielles (2)

I. Equations à second membre séparé

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille (f, y et u sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $2\sqrt{f(x)} = Df(x)$

(b) $xf(x)Df(x) + f^2(x) + 1 = 0, \quad f(1) = 1$

(c) $(1 + e^x)f(x)Df(x) = e^x$

(d) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}Dy = 0$

(e) $Du - 2xu = x$

Les solutions générales sont données par

(a) $f(x) = (x+C)^2,\ x \geq -C$

(b) $x^2(1+f^2(x)) = C$

(c) $f^2(x) = 2\ln(1+e^x) + C,\ x \in \mathbb{R}$

(d) $\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} = C,\ x \in I \subset]-1,1[$

(e) $u(x) = Ce^{x^2} - \dfrac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}$

où C est une constante réelle arbitraire.

L'unique solution de (b) est $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x^2}{x^2}}, \quad x \in]0, \sqrt{2}[$.

Notons de plus que
- l'équation (a) admet la solution singulière $f = 0$ sur $\mathbb{R}$;
- l'équation (d) admet les solutions singulières $y = -1$ et $y = 1$ sur $\mathbb{R}$;

II. Equations différentielles à second membre homogène

Résoudre les équations différentielles suivantes (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Df(x) = \dfrac{x}{f(x)} + \dfrac{f(x)}{x}$

(b) $y(x) + (2\sqrt{xy(x)} - x)Dy(x) = 0$

(c) $xDy(x) = y(x)\ln\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$

(d) $y^2(x) - 3x^2 + 2xy(x)Dy(x) = 0$

(e) $f^2(x) + x(x - f(x))Df(x) = 0$

Les solutions générales de ces équations différentielles sont données par

(a) $f^2(x) = x^2(\ln(x^2) + C)$

(b) $\ln|y(x)| + \sqrt{\dfrac{x}{y(x)}} = C$

(c) $y(x) = xe^{Cx+1},\ x \in \mathbb{R}_0$

(d) $x(x^2 - y^2(x)) = C$

(e) $f(x) = x\ln(C_1|f(x)|)$

où C est une constante réelle arbitraire et C_1 une constante réelle strictement positive.
Notons de plus que les équations (e) admet la solution singulière $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

III. Equations différentielles - Types

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer SANS LA RESOUDRE le type d'équation dont il s'agit ainsi qu'une méthode pour la résoudre (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Dy(x) = \dfrac{2y^2(x) - xy(x)}{x^2 - xy(x) + y^2(x)}$

(b) $Dy(x) = -\dfrac{2y(x)+1}{x}$

(c) $Df(x) = \dfrac{e^{2f(x)} - f(x)\cos(xf(x))}{x\cos(xf(x)) - 2xe^{2f(x)} - 2f(x)}$

(d) $(1-x^2)Dy(x) = y(x) - (x+1)^2(x-1)$

(e) $x^2D^2f(x) + xDf(x) + f(x) = \dfrac{1}{\cos(\ln(x))} + 2\sin(\ln(x))$

(f) $D^6f(x) - 2D^4f(x) - 4D^2f(x) + 8f(x) = e^{\sqrt{2}x} + \cos(x)$

(g) $(x^2 + 2xy(x) - y^2(x)) + (y^2(x) + 2xy(x) - x^2)Dy(x) = 0$

(h) $\sqrt{1-x^2}Df(x) - f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Il s'agit

(a) d'une équation à second membre homogène : en effet, en mettant x^2 en évidence au numérateur et au dénominateur, elle se réécrit

$$Dy(x) = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Il suffit donc de passer à la fonction $u(x) = \frac{y}{x}$ pour obtenir l'équation à second membre séparé

$$Du(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{2u^2(x) - u(x)}{1 - u(x) + u^2(x)} - u\right].$$

(b) d'une équation à second membre linéaire ;

(c) d'une équation exacte qui équivaut à

$$D\left(\sin(xf(x)) - xe^{2f(x)} - f^2(x)\right) = 0\ ;$$

(d) d'une équation à second membre linéaire ;

(e) d'une équation d'Euler qui se réécrit, en effectuant le changement de variable $x = e^t$ et en posant $F(t) = f(e^t)$,

$$D^2F(t) + F(t) = \frac{1}{\cos(t)} + 2\sin(t)$$

qui est une EDLCC d'ordre 2 non homogène. Celle-ci se résout en cherchant la solution générale F_h de l'équation homogène associée (via les zéros du polynôme caractéristique) ainsi qu'une solution particulière F_p : cette dernière peut être obtenue en cherchant des solutions particulières F_{p_1} et F_{p_2} des équations

$$D^2F(t) + F(t) = \frac{1}{\cos(t)} \qquad \text{et} \qquad D^2F(t) + F(t) = 2\sin(t)$$

respectivement. Une solution F_{p_1} de la première équation peut être déterminée par la méthode de variation des constantes. Sachant que la seconde est à coefficients réels et que $\sin(t) = \mathcal{I}\mathrm{m}(e^{it})$, une solution F_{p_2} peut en être déterminée en prenant la partie imaginaire d'une solution particulière de l'équation

$$D^2F(t) + F(t) = 2e^{it},$$

qui peut, quant à elle, être déterminée par la méthode des exponentielles polynômes (Notons que i est un zéro de multiplicité 1 du polynôme caractéristique).
Ainsi, la solution générale de l'EDLCC ci-dessus s'écrit

$$F(t) = F_h(t) + F_p(t) = F_h(t) + F_{p_1}(t) + F_{p_2}(t)$$

et la solution générale de l'équation de départ est enfin donnée par $f(x) = F(\ln(x))$;

(f) d'une EDLCC d'ordre 6 non homogène. Celle-ci se résout en cherchant la solution générale F_h de l'équation homogène associée (via les zéros du polynôme caractéristique) ainsi qu'une solution particulière F_p : cette dernière peut être obtenue en cherchant des solutions particulières F_{p_1} et F_{p_2} des équations

$$D^6 f(x) - 2D^4 f(x) - 4D^2 f(x) + 8f(x) = e^{\sqrt{2}x} \qquad \text{et} \qquad D^6 f(x) - 2D^4 f(x) - 4D^2 f(x) + 8f(x) = \cos(x)$$

respectivement. Une solution F_{p_1} de la première équation peut être déterminée par la méthode des exponentielles polynômes (Notons que $\sqrt{2}$ est un zéro de multiplicité 2 du polynôme caractéristique). Sachant que la seconde est à coefficients réels et que $\cos(t) = \mathcal{R}(e^{it})$, une solution F_{p_2} peut en être déterminée en prenant la partie réelle d'une solution particulière de l'équation

$$D^6 f(x) - 2D^4 f(x) - 4D^2 f(x) + 8f(x) = e^{it},$$

qui peut, quant à elle, être déterminée par la méthode des exponentielles polynômes (Notons que i n'est pas un zéro du polynôme caractéristique).
Ainsi, la solution générale de l'EDLCC de départ s'écrit

$$F(t) = F_h(t) + F_p(t) = F_h(t) + F_{p_1}(t) + F_{p_2}(t)$$

(g) d'une équation à second membre homogène qui se réécrit

$$Dy(x) = \frac{\dfrac{y^2(x)}{x^2} - 2\dfrac{y(x)}{x} - 1}{\dfrac{y^2(x)}{x^2} + 2\dfrac{y(x)}{x} - 1}$$

Il suffit alors de poser $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ pour se ramener à une équation à second membre séparé, à savoir

$$Du(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{u^2(x) - 2u(x) - 1}{u^2(x) + 2u(x) - 1} - u(x)\right) \ ;$$

(h) d'une équation à second membre linéaire.
(Voir cours théorique pour plus de détails concernant les méthodes de résolutions.)

IV. Equations différentielles - Résolution

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant (si possible) le domaine sur lequel on travaille (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Dy(x) + y(x)\mathrm{cotg}(x) = 5e^{\cos(x)}$

(b) $xDf(x) - f(x) = x^2e^x$

(c) $3y^2(x)Dy(x)x + y^3(x) = x + 1$

(d) $x^2D^2 f(x) - 2f(x) = 2x - 1$, **sur** $]0, +\infty[$

(e) $Df(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\sin(f(x))}$

(f) $D^2y(x) + \omega^2 y(x) = \dfrac{1}{\cos(\omega x)}$

(g) $(x - f(x))Df(x) = f(x)$ **(Sugg. : poser** $u = \frac{f(x)}{x}$**)**

(h) $D^3y(x) - 2D^2y(x) + Dy(x) = xe^x$

Les solutions générales de ces équations différentielles sont données par

(a) $y(x) = \dfrac{C - 5e^{\cos(x)}}{\sin(x)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $f(x) = (C + e^x)\, x,\ x \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = \sqrt[3]{\dfrac{C + 2x + x^2}{2x}},\ x \in \mathbb{R}_0$

(d) $f(x) = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x} - x + \dfrac{1}{2},\ x > 0$

(e) $x - \cos(x)\sin(x) + 2\cos(f(x)) = C$

(g) $f(x) = C\exp\left(-\dfrac{x}{f(x)}\right)$

(h) $y(x) = C_1 + (C_2x + C_3)e^x + \dfrac{1}{6}\left(x^3 - 3x^2\right)e^x,\ x \in \mathbb{R}$

(f) $y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) + \dfrac{\cos(\omega x)}{\omega^2} \ln|\cos(\omega x)| + \dfrac{x}{\omega} \sin(\omega x),\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\omega} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

où C, C_1, C_2, C_3 sont des constantes réelles arbitraires.

V. Divers

1. **L'équation de la déformation d'une poutre élastique supportant une charge uniformément répartie sur toute sa longueur l est donnée par**

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w_0 \qquad , \qquad 0 \le x \le l$$

où EI représente la rigidité flexionnelle de la poutre et où w_0 représente la charge par unité de longueur.
Déterminer la déformation d'une poutre encastrée à ses deux extrémités, c'est-à-dire telle que

$$y(0) = y(l) = 0 \qquad , \qquad Dy(0) = Dy(l) = 0.$$

La déformation de la poutre est donnée par $y(x) = \dfrac{w_0}{24EI}\, x^2 (x-l)^2$.

2. **La distribution de la température $T(r)$ dans la région comprise entre deux cylindres concentriques de rayons $r = a$ et $r = b$ $(a < b)$ est gouvernée par la loi**

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0 \quad \textbf{où} \quad T(a) = T_0,\ T(b) = T_1.$$

Déterminer $T(r)$.

La distribution de la température est donnée par

$$T(r) = \frac{T_0 \ln(\frac{r}{b}) - T_1 \ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{a}{b})}.$$

3. **Dans les conditions d'équilibre des phases liquide-vapeur d'un corps pur, la formule de Clapeyron exprimant la chaleur latente L de changement d'état (volume de la phase liquide négligeable devant le volume de la phase gazeuse) s'écrit**

$$L = \frac{RT^2}{p} \frac{dp}{dT}.$$

De cette expression, donner la loi de variation de la pression p en fonction de la température T.
Si un système physique est tel que, à une température initiale T_0, la pression vaut p_0, déterminer la loi particulière de variation de la pression qui régit ce système.

La loi de variation de la pression qui régit ce système est donnée par

$$p(T) = C \exp\left(-\frac{L}{RT}\right)$$

où C est une constante complexe arbitraire. Tenant compte de la condition initiale $p(T_0) = p_0$, il vient que

$$C \exp\left(-\frac{L}{RT_0}\right) = p_0 \qquad \Rightarrow \qquad C = p_0 \exp\left(\frac{L}{RT_0}\right).$$

Dès lors, la loi particulière de variation de la pression qui régit ce système est

$$p(T) = p_0 \exp\left(\frac{L}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right).$$

4. **Un médecin arrivant sur le lieu d'un crime constate que la température du mort est de $32°$ et que la température de l'air ambiant est de $18°$C. Deux heures plus tard, la température du mort est descendue à $26°$. En supposant que le taux de refroidissement du corps est proportionnel à la différence de température entre l'air et le corps de la victime (loi de Newton) et que la température du corps au moment du décès était de $36°$C, déterminer le temps écoulé depuis la mort de la victime jusqu'à l'arrivée du médecin.**

   Le temps écoulé depuis la mort de la victime jusqu'à l'arrivée du médecin est 54 minutes.