
Université
de Liège



1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales : partim B'
RÉPÉTITION 3* : PHYSIQUE

CORRECTION

RÉPÉTITION 3* : ANALYSE VECTORIELLE ET OPÉRATEURS DE DÉRIVATION

I. Dérivation des intégrales paramétriques

1. Soient un réel a et une fonction f telle que $t \mapsto f(t)e^{-at}$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$.
Montrer que la fonction

$$x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que, dans cet intervalle, on a

$$DF(x) = - \int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t) dt.$$

Il s'agit d'une application du théorème des intégrales paramétriques avec $A =]0, +\infty[$ comme ensemble d'intégration (variable notée t) et $\Lambda =]a, +\infty[$ comme ouvert de variation du paramètre (paramètre noté x).

Seule la majoration uniforme de la dérivée première n'est pas immédiate.

Suggestion. Si K est un compact inclus dans Λ , alors il existe $r > a$ tel que $K \subset [r, +\infty[$. Il s'ensuit que

$$|D_x(e^{-xt} f(t))| = te^{-xt} |f(t)| \leq e^{-at} |f(t)| te^{-(r-a)t} \leq Ce^{-at} |f(t)| \quad \forall x \in K, t > 0,$$

où C est une constante.

2. Sachant qu'elles sont définies¹, calculer les intégrales suivantes.

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} e^{-x} dx \quad (a, b \in \mathbb{R})$

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} dx \quad (a, b > 0)$

La première intégrale vaut $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+b^2}{1+a^2} \right)$ et la seconde $\frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{a}{b} \right)$.

3. Soit

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx, \quad t > -1.$$

(a) Montrer que cette fonction est bien définie et est continûment dérivable sur $] -1, +\infty[$.

(b) Calculer $F(0)$.

(c) Montrer que $DF(t) = \frac{1}{t+1}$.

(d) En déduire l'expression explicite (pas sous forme d'intégrale) de F .

Montrons que F est bien défini, c'est-à-dire que $x \mapsto f(x, t) = \frac{x^t - 1}{\ln x}$ est intégrable sur $]0, 1[$ pour tout $t > -1$.

La fonction $x \mapsto f(x, t) = \frac{x^t - 1}{\ln x}$ est continue sur $]0, 1[$ et

– Intégrabilité en 1^- : le théorème de l'Hospital montre que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x, t) = 1 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 1^- .

1. Vérifier l'intégrabilité de chacune des fonctions sur le domaine considéré constitue un bon exercice!!

- Intégrabilité en 0^+ lorsque $t \geq 0$: on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+ .
- Intégrabilité en 0^+ lorsque $-1 < t < 0$: on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-t} f(x, t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+ .

La seconde étape consiste alors à appliquer le théorème de dérivation des intégrales paramétriques. Vérifions-en les hypothèses : tout est direct sauf, peut-être, l'estimation uniforme de la dérivée.

Suggestion. On a $D_t f(x, t) = x^t$.

- Majoration lorsque $t \in [r, 0]$ avec $-1 < r < 0$:

$$\sup_{t \in [r, 0]} |D_t f(x, t)| = x^t \leq x^r \in L^1(]0, 1[)$$

- Majoration lorsque $t \in [0, R]$ avec $R > 0$:

$$\sup_{t \in [0, R]} |D_t f(x, t)| = x^t \leq 1 \in L^1(]0, 1[)$$

Les intégrales paramétriques donnent

$$DF(t) = \int_0^1 D_t f(t, x) dx = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}, \quad \forall t > -1$$

donc

$$F(t) = \ln(t+1) + \text{constante}, \quad \forall t > -1.$$

Comme $F(0) = 0$, on trouve $\text{constante} = 0$ et, finalement,

$$\int_0^1 f(t, x) dx = \ln(t+1), \quad \forall t > -1.$$

II. Manipulations (algébrique et géométrique) et dérivation

1. Soient \vec{F}, \vec{G} des fonctions vectorielles en la variable réelle u et soit ϕ une fonction scalaire de la variable réelle u . On suppose que ces fonctions sont dérivables dans le même intervalle ouvert de \mathbb{R} . Dans cet intervalle,

(a) établir la formule

$$D(\vec{F} \bullet \vec{G}) = (D\vec{F}) \bullet \vec{G} + \vec{F} \bullet (D\vec{G})$$

et en déduire qu'un vecteur de norme constante est orthogonal à sa dérivée ;

(b) établir la formule

$$D(\phi \vec{F}) = \phi D\vec{F} + (D\phi) \vec{F}.$$

2. On désigne par \vec{e}_j ($j = 1, 2, 3$) les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On définit la fonction vectorielle \vec{R} par

$$\vec{R}(t) = \cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 + t \vec{e}_3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer

$$(i) D\vec{R}, \quad (ii) D^2\vec{R}, \quad (iii) \|D\vec{R}\|, \quad (iv) D\vec{R} \wedge D^2\vec{R}.$$

- (i) $D\vec{R}(t) = -\sin t \vec{e}_1 + \cos t \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ (iii) $\|D\vec{R}(t)\| = \sqrt{2}$
(ii) $D^2\vec{R}(t) = -\cos t \vec{e}_1 - \sin t \vec{e}_2$ (iv) $D\vec{R} \wedge D^2\vec{R} = \sin t \vec{e}_1 - \cos t \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

(b) Esquisser la courbe décrite par l'extrémité P du vecteur lié

$$\vec{OP}(t) = \vec{R}(t), \quad t \geq 0$$

et représenter le vecteur tangent à la courbe aux points de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = \frac{\pi}{2}$. Il s'agit d'une hélice circulaire située sur le cylindre circulaire droit de rayon 1 et dont l'axe de symétrie est l'axe Oz .

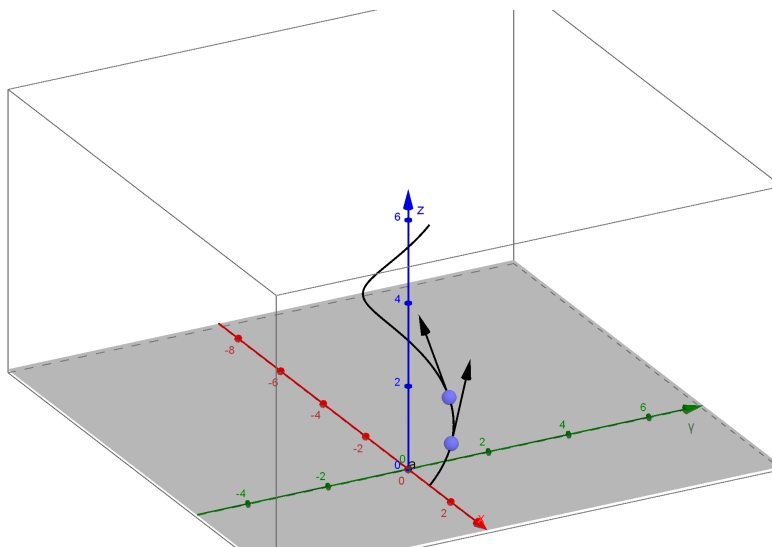


FIGURE 1 – Hélice circulaire et les vecteurs tangents.

3. On désigne par \vec{e}_j ($j = 1, 2, 3$) les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On donne la fonction vectorielle

$$\vec{F}(u, v) = u \sin v \vec{e}_1 + v \cos u \vec{e}_2 + u \vec{e}_3, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer l'expression explicite des fonctions suivantes (à valeurs scalaires ou vectorielles)

(a) $D_u \vec{F} \bullet D_v \vec{F}$, (b) $D_u \vec{F} \wedge D_v \vec{F}$.

(a) $D_u \vec{F} \bullet D_v \vec{F} = u \sin v \cos v - v \sin u \cos u$

(b) $D_u \vec{F} \wedge D_v \vec{F} = -\cos u \vec{e}_1 + u \cos v \vec{e}_2 + (\sin v \cos u + uv \sin u \cos v) \vec{e}_3$

4. On désigne par \vec{e}_j ($j = 1, 2, 3$) les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. Une particule se déplace de telle sorte que, à l'instant t , son vecteur position \vec{r} est donné par

$$\vec{r}(t) = \cos(\omega t) \vec{e}_1 + \sin(\omega t) \vec{e}_2$$

où $t \in \mathbb{R}$ et ω désigne une constante.

(a) Montrer que, à tout instant, la vitesse \vec{v} de la particule est orthogonale à son vecteur position.

On a $\vec{v}(t) = D\vec{r}(t) = \omega [-\sin(\omega t) \vec{e}_1 + \cos(\omega t) \vec{e}_2]$ de sorte que $\vec{v}(t) \bullet \vec{r}(t) = 0$ quel que soit t .

(b) Montrer que, à tout instant, l'accélération de la particule est dirigée vers l'origine et a une norme proportionnelle à sa distance à l'origine.

$$\vec{a}(t) = D\vec{v}(t) = D^2\vec{r}(t) = -\omega^2\vec{r}(t) \text{ de sorte que } \|D^2\vec{r}(t)\| = \omega^2 \|\vec{r}(t)\| \text{ quel que soit } t.$$

(c) Montrer que la fonction vectorielle $\vec{r} \wedge \vec{v}$ est un vecteur constant.

$$\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t) = \omega \vec{e}_3 \text{ quel que soit } t.$$

(d) **Interpréter géométriquement les résultats.**

La particule suit un mouvement circulaire uniforme : elle parcourt un cercle centré à l'origine et de rayon 1.

La vitesse est, à tout instant, tangente au cercle, et donc perpendiculaire au vecteur position \vec{r} , et de norme constante ω .

L'accélération est quant à elle dirigée vers le centre du cercle (accélération centripète) et de norme constante ω^2 : elle permet à la particule de conserver sa trajectoire circulaire.

III. Gradient, divergence, rotationnel

1. On donne les fonctions vectorielle et scalaire suivantes

$$\vec{r}(x, y, z) = [x, y, z], \quad r(x, y, z) = \|\vec{r}(x, y, z)\|$$

et le vecteur constant $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$. Déterminer

- (a) le rotationnel de la fonction vectorielle \vec{r}
- (b) le gradient de la fonction scalaire $\frac{1}{r}$
- (c) le gradient de la fonction scalaire $\vec{r} \bullet \vec{r}$
- (d) le gradient de la divergence des fonctions vectorielles \vec{r} et $r \vec{r}$
- (e) le rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{a} \wedge \vec{r}$
- (f) le gradient de la fonction scalaire $\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|$

(a) $\text{rot}(\vec{r}) = \vec{0}$

(b) $\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

(c) $\text{grad}(\vec{r} \bullet \vec{r}) = 2\vec{r}$

(d) $\text{grad}[\text{div}(\vec{r})] = \vec{0}$ et $\text{grad}[\text{div}(r \vec{r})] = 4\frac{\vec{r}}{r}$

(e) $\text{rot}(\vec{a} \wedge \vec{r}) = 2\vec{a}$

(f) $\text{grad}(\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|) = \frac{(\vec{a} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{a}}{\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|}$

2. Soit les champs vectoriels

$$\vec{f}(x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{g}(x, y) = -\frac{1}{2}y\vec{e}_1 + \frac{1}{2}x\vec{e}_2$$

représentés sur les figures ci-dessous.

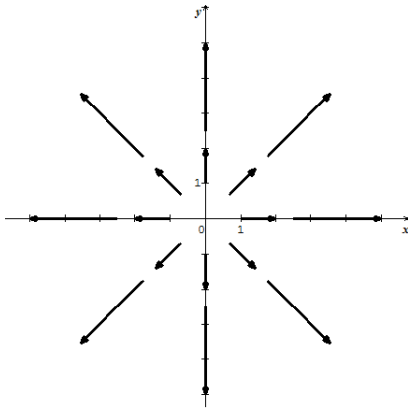


FIGURE 2 – Champ vectoriel \vec{f}

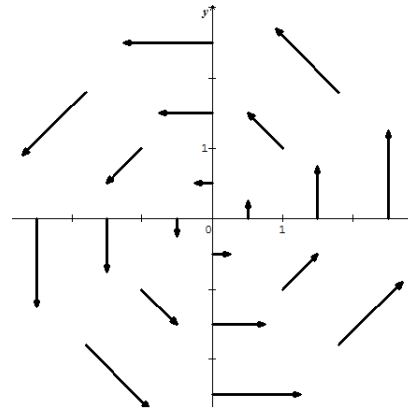


FIGURE 3 – Champ vectoriel \vec{g}

(a) Calculer la divergence du champ \vec{f} et interpréter le résultat obtenu sur base de sa représentation (FIG. 2).

La divergence de \vec{f} vaut 2 en tout point : elle est constante et positive, ce qui montre que le champ vectoriel \vec{f} fuit l'origine de manière uniforme.

(b) Calculer le rotationnel du champ \vec{f} et interpréter le résultat obtenu sur base de sa représentation (FIG. 2).

Le rotationnel de \vec{f} est nul en tout point, ce qui montre que le champ vectoriel \vec{f} ne tourne à aucun endroit.

(c) Mêmes questions pour le champ \vec{g} et sa représentation (FIG. 3).

La divergence de \vec{g} est nulle en tout point, ce qui montre que le champ vectoriel \vec{g} ne possède ni source, ni puits.

Le rotationnel de \vec{g} vaut le vecteur \vec{e}_3 en tout point : il est donc constant, ce qui montre que le champ vectoriel \vec{g} tourne, de manière uniforme, autour de l'origine. Par ailleurs, en utilisant la règle de la main droite (le pouce en direction du rotationnel), on peut conclure que le champ \vec{g} tourne dans le sens trigonométrique (par rapport à la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) du plan).

3. Sur les exemples suivants, vérifier que le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire régulière est nul et que la divergence du rotationnel d'une fonction vectorielle régulière est nulle.

(a) $H(x, y, z) = \cos(xyz)$ (b) $\vec{f}(x, y, z) = [x^2y, x^2z^4, e^{xyz}]$

4. Les opérations suivantes ont-elles un sens ?

Si oui, définissent-elles une fonction scalaire ou une fonction vectorielle ?

- (a) Gradient de la divergence d'une fonction vectorielle
- (b) Gradient de la divergence d'une fonction scalaire
- (c) Divergence du gradient d'une fonction scalaire
- (d) Divergence du gradient d'une fonction vectorielle
- (e) Divergence de la divergence d'une fonction scalaire
- (f) Rotationnel de la divergence d'une fonction vectorielle

(a) L'opération a du sens et définit un vecteur.

(b) L'opération n'a pas de sens.

- (c) L'opération a du sens et définit un scalaire.
- (d) L'opération n'a pas de sens.
- (e) L'opération n'a pas de sens.
- (f) L'opération n'a pas de sens.

5. Soient \vec{f} et \vec{g} (resp. ϕ et ψ) deux fonctions vectorielles (resp. scalaires).

Démontrer les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi & \text{(c)} \nabla \bullet (\vec{f} + \vec{g}) = \nabla \bullet \vec{f} + \nabla \bullet \vec{g} \\ \text{(b)} \nabla \wedge (\vec{f} + \vec{g}) = \nabla \wedge \vec{f} + \nabla \wedge \vec{g} & \text{(d)} \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \end{array}$$

VI. Divers

1. La température en chacun des points du plan est donnée par $T(x, y) = x^2 - 2y^2$.

(a) Dans quelle direction une fourmi initialement située en $(2, -1)$ doit-elle se déplacer pour se rafraîchir le plus rapidement possible ?

La direction dans laquelle la fonction T décroît le plus vite est, en tout point (x, y) , celle du vecteur

$$-\text{grad } T(x, y) = -[2x, -4y].$$

En particulier, au point $(2, -1)$, elle est donnée le vecteur $[-4, -4]$, ou encore le vecteur unitaire $\vec{e} = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

(b) Si la fourmi se déplace à la vitesse constante v , quelle chute de température ressentira-t-elle initialement ?

Comme la fourmi se déplace dans la direction \vec{e} à la vitesse constante v à partir du point $P_0(2, -1)$, sa position à tout instant t est donnée par

$$P(t) = P_0 + vt\vec{e} = \left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}vt, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}vt \right]$$

et sa température à tout instant t vaut

$$T_f(t) = T(P(t)) = 2 - 4\sqrt{2}vt - \frac{1}{2}v^2t^2.$$

Dès lors, la variation de température subie initialement par la fourmi est donnée par

$$(DT_f)(0) = \left[-4\sqrt{2}v - v^2t \right]_{t=0} = -4\sqrt{2}v.$$

(c) Le long de quelle courbe la fourmi doit-elle se déplacer pour que la température décroisse le plus rapidement ?

Si on note $(x(t), y(t))$ la position de la fourmi à tout instant t , la direction dans laquelle elle se déplace est alors donnée par $\vec{v}(t) = [Dx(t), Dy(t)]$.

Ainsi, pour que la température décroisse le plus rapidement, il faut que, à tout instant t , $\vec{v}(t)$ ait même direction et même sens que $-\text{grad } T(x(t), y(t))$, autrement dit il faut que ces deux vecteurs soient parallèles, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que

$$\begin{cases} Dx(t) = -2\lambda x(t) \\ Dy(t) = 4\lambda y(t) \end{cases}$$

Tenant compte des conditions initiales $x(0) = 2$ et $y(0) = -1$, il s'ensuit que ces deux EDLCC ont pour solutions

$$\begin{cases} x(t) = 2 \exp(-2\lambda t) \\ y(t) = -\exp(4\lambda t) \end{cases}.$$

Enfin, en éliminant le paramètre t de ces équations, on conclut que la courbe est la courbe d'équation cartésienne $x^2y = -4$ ($x \geq 0, y \leq 0$).

2. Un fil électrique rectiligne est parcouru par un courant d'intensité I constant. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace tel que \vec{e}_3 est parallèle au fil et orienté dans le sens du courant, la valeur du champ magnétique en tout point P de l'espace est donnée par

$$\vec{B}(P) = \frac{I\vec{e}_3 \wedge \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}$$

où \vec{d} est le vecteur joignant, perpendiculairement, le fil au point P .

- (a) Faire un dessin de la situation ; indiquer le vecteur \vec{d} .

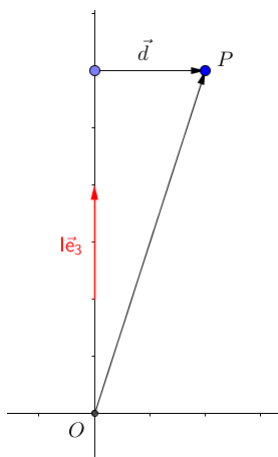


FIGURE 4 – Représentation du fil, du point P et du vecteur \vec{d} .

- (b) Calculer la divergence et le rotationnel de \vec{B} .

Quel que soit le point $P(x, y, z)$, il vient que

$$\vec{d} = \vec{OP} - z\vec{e}_3 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

Ainsi,

$$\vec{B}(P) = \frac{1}{x^2 + y^2} (I\vec{e}_3 \wedge \vec{d}) = \frac{I}{x^2 + y^2} [-y, x, 0]$$

de sorte que la divergence et le rotationnel de \vec{B} sont nuls² quel que soit P .

2. Notons que la divergence d'un champ magnétique est toujours nulle. Par contre, le fait que le rotationnel soit nul est un cas particulier de la situation physique considérée ici.