
Université
de Liège



1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales : partim B'
RÉPÉTITION 5* : PHYSIQUE

CORRECTION

RÉPÉTITION 5* : INTÉGRALES DE SURFACES ET FORMULES DE GAUSS, GREEN ET STOKES

I. Paramétrages et intégrales de surfaces

1. Soit $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé de l'espace. On donne l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

(a) Représenter l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient cette équation.

Comment s'appelle cet ensemble ?

(b) Déterminer un paramétrage de la surface \mathcal{S} correspondant aux points de cet ensemble dont la cote z est comprise entre 0 et 4.

(c) Calculer l'aire de cette surface \mathcal{S} .

(a) Il s'agit d'un cône circulaire droit dont l'axe de symétrie de rotation est Oz .

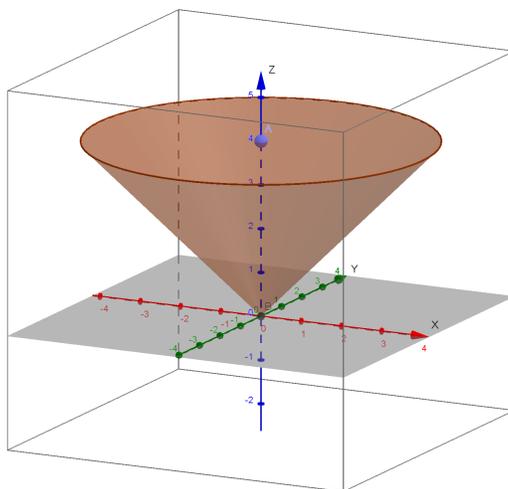


FIGURE 1 – Représentation de \mathcal{S} .

(b) Un paramétrage injectif continument dérivable de \mathcal{S} est par exemple

$$\vec{\Phi} : (u, v) \in [0, 4] \times [0, 2\pi] \mapsto (u \cos(v), u \sin(v), u).$$

(c) Dès lors, l'aire de \mathcal{S} est donnée par

$$\iint_{\mathcal{S}} d\sigma = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \|D_u \vec{\Phi} \wedge D_v \vec{\Phi}\| du dv = \sqrt{2} \int_0^4 \int_0^{2\pi} u du dv = 16\sqrt{2}\pi$$

(unités d'aire).

2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan, on considère l'arcade de cycloïde paramétrée par

$$(t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Déterminer un paramétrage de la surface \mathcal{A} délimitée par cette arcade de cycloïde et l'axe des abscisses.

(b) Calculer l'aire de cette surface \mathcal{A} .

(a) Un paramétrage injectif continument dérivable de \mathcal{A} est par exemple

$$\vec{\Phi} : (u, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto (t - \sin(t), u(1 - \cos(t))).$$

(b) Dès lors, l'aire de \mathcal{A} est donnée par

$$\iint_{\mathcal{A}} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|D_u \vec{\Phi} \wedge D_t \vec{\Phi}\| dt du = \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2 \cos(t) + \frac{1}{2} \cos(2t) dt du = 3\pi$$

(unités d'aire).

3. Calculer $\iint_{\mathcal{B}} x^2 z d\sigma$ où \mathcal{B} est le bord du borné fermé de l'espace défini par les relations

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad z \in [0, 1].$$

L'intégrale vaut $\frac{3\pi}{4}$.

II. Formules de Gauss, Green et Stokes

1. Formule de Green dans le plan

Soit K un borné fermé de \mathbb{R}^2 dont le contour \mathcal{C} est une union finie de courbes planes orientées « aire à gauche » et soit $\vec{f} = (f_1, f_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert Ω tel que $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$. On a

$$\iint_K (D_x f_2 - D_y f_1) dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} (f_1 dx + f_2 dy)$$

Vérifier la formule de Green pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ et la surface

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2 - x^2\}.$$

Représenter \mathcal{A} .

Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur $\frac{56}{15}$.

2. Formule de Gauss (ou théorème de la divergence)

Soit V un borné fermé de \mathbb{R}^3 dont la frontière \mathcal{S} est une union finie de surfaces orientables et soit $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur Ω tel que $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{f}) dx dy dz = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

où \vec{n} est la normale unitaire extérieure à la surface.

Vérifier le théorème de la divergence pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y, z) = (4x, 3z, 5y)$ et la surface \mathcal{S} du cône (portion de cône)

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0, 2]\}.$$

Les intégrales des deux membres de la formule de Gauss ont pour valeur $\frac{32\pi}{3}$.

3. Formule de Stokes

Soit \mathcal{S}^+ une union finie de surfaces régulières orientées dont la frontière est la courbe fermée \mathcal{C}^+ composée d'une union finie de courbes régulières et orientées de manière à respecter la règle du tire-bouchon par rapport à l'orientation de \mathcal{S}^+ .

Soit également $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur Ω tel que $\mathcal{S} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a

$$\iint_{\mathcal{S}^+} \operatorname{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \cdot \vec{t} ds = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz,$$

où \vec{n} est la normale unitaire à \mathcal{S}^+ et \vec{t} le vecteur tangent unitaire à \mathcal{C}^+ .

Soit la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y, z) = \alpha (l^4 z^2, -3l^4 xy, x^3 y^3)$ où $l > 0$ est une longueur et $\alpha > 0$ donne à \vec{f} les dimensions d'une force et soit la surface $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = l, x^2 + y^2 \leq 4l^2\}$ orientée de sorte que sa normale soit dirigée dans le sens de l'axe Z .

- (a) Vérifier la formule de Stokes dans le cas de \vec{f} et \mathcal{S} .
- (b) Soit la surface $\mathcal{S}' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq l, x^2 + y^2 = l(5l - z)\}$ orientée de sorte que sa normale soit dirigée dans le sens de l'axe Z . Représenter \mathcal{S}' dans un repère orthonormé.
- (c) Dédurre des deux points précédents le flux de $\text{rot}(\vec{f})$ au travers de \mathcal{S}' , donné par

$$\iint_{\mathcal{S}'} \text{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

- (a) Les intégrales des deux membres de la formule de Stokes sont nulles.
- (b) La surface \mathcal{S}' est un morceau de parabolôide circulaire, situé au dessus du plan $z = l$. Le bord de cette surface est le même que celui de \mathcal{S} , à savoir $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = l, x^2 + y^2 = 4l^2\}$.

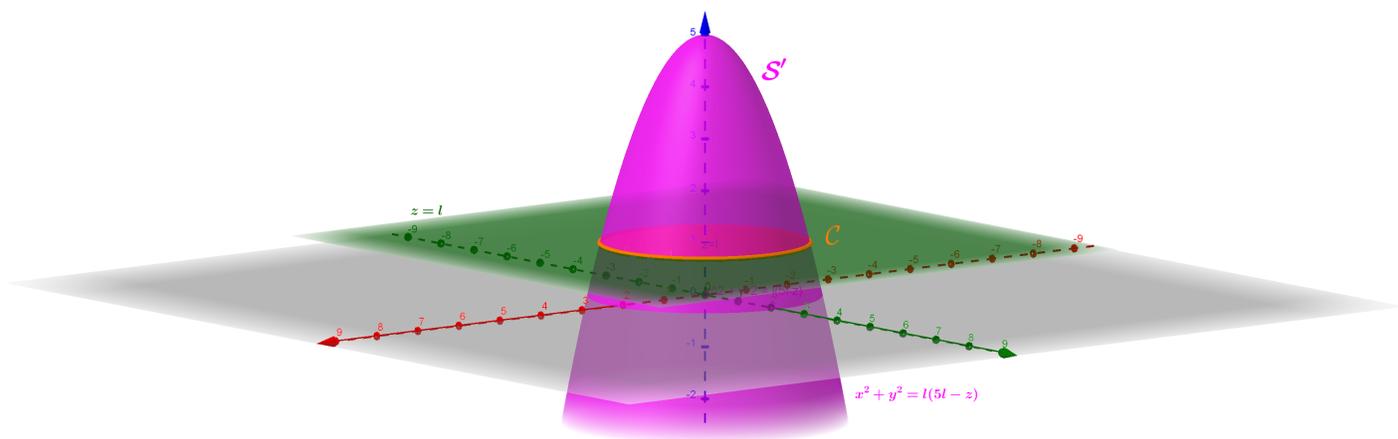


FIGURE 2 – Représentation de \mathcal{S}' et de son bord \mathcal{C} ($l = 1$).

- (c) Comme les surfaces \mathcal{S} et \mathcal{S}' possèdent le même bord \mathcal{C} et sont orientées dans le même sens, le théorème de Stokes implique que

$$\iint_{\mathcal{S}'} \text{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_{\mathcal{C}} l^4 z^2 \, dx - 3l^4 xy \, dy + x^3 y^3 \, dz = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0.$$

III. Divers

1. Un dispositif d'éclairage est muni d'un élément réflecteur dont la forme est obtenue par rotation de la branche de parabole $y = \sqrt{z}$ ($y \in [0, 1]$) autour de l'axe OZ . Déterminer l'aire du réflecteur.

Le réflecteur \mathcal{R} est paramétré par

$$\vec{\Phi} : (z, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto (\sqrt{z} \cos(\theta), \sqrt{z} \sin(\theta), z)$$

qui est injectif et continûment dérivable sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.

L'aire du réflecteur est alors donnée par

$$\iint_{\mathcal{R}} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|D_z \vec{\Phi} \wedge D_\theta \vec{\Phi}\| d\theta dz = \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{z + \frac{1}{4}} d\theta dz = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

(unités d'aire).

2. **La température T en un point d'une boule métallique est proportionnelle au carré de la distance au centre de la boule. Calculez le taux de transmission de chaleur à travers une sphère \mathcal{S} de rayon R centrée au centre de la boule.**

(Sugg. : utiliser (\star))

Si le centre de la boule occupe l'origine du repère orthonormé dans lequel on travaille, la température est donnée par

$$T(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

où C est une constante de proportionnalité. Le transfert de chaleur est caractérisé par

$$\vec{F}(x, y, z) = -K \text{grad } T = -KC (2x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 + 2z\vec{e}_3)$$

où K est la conductivité du métal.

Sachant que, en utilisant les coordonnées sphériques, la sphère de rayon R est paramétrée par

$$\vec{\Phi} : (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \mapsto (R \sin(\theta) \cos(\varphi), R \sin(\theta) \sin(\varphi), R \cos(\theta)),$$

le taux de transmission de chaleur à travers la sphère \mathcal{S} est donné par

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\vec{F} \cdot \vec{n}) (\vec{\Phi}(\varphi, \theta)) \|D_\varphi \vec{\Phi} \wedge D_\theta \vec{\Phi}\| d\varphi d\theta \\ &= -2KCR \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|D_\varphi \vec{\Phi} \wedge D_\theta \vec{\Phi}\| d\varphi d\theta \\ &= -8\pi R^3 KC \end{aligned}$$

puisque $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|D_\varphi \vec{\Phi} \wedge D_\theta \vec{\Phi}\| d\varphi d\theta = \iint_{\mathcal{S}} d\sigma$ correspond à l'aire de la sphère, c'est-à-dire $4\pi R^2$.

3. **Un champ magnétique est donné par**

$$\vec{B} = (5x + \sin(y^2 z)) \vec{e}_1 + (\arctan(xz) + 4y) \vec{e}_2 + (\cos(xy) - 6z) \vec{e}_3$$

Calculer le flux de ce champ magnétique au travers de la surface fermée \mathcal{S} correspondant au bord d'un cube d'arête égale à 2 centré à l'origine. (Sugg. : remplacer l'intégrale de surface par une autre)

La formule de Gauss (divergence) stipule que le flux d'un champ vectoriel donné au travers d'une surface fermée \mathcal{S} est égale à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le borné fermé délimité par \mathcal{S} . Dans notre cas, la divergence du champ magnétique considéré vaut 3 et donc le flux recherché est donné par

$$\iiint_K 3 dx dy dz = 3 \iiint_K dx dy dz$$

où K est le borné fermé correspondant au cube. Puisque $\iiint_K dx dy dz$ correspond au volume de ce borné fermé, c'est-à-dire 8 (unités de volume), le flux recherché vaut 24.

4. La formule de Green, stipulant que

$$\iint_K D_x f_2 - D_y f_1 \, dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1 dx + f_2 dy$$

où K est un borné fermé du plan, \mathcal{C}^+ son bord orienté « aire à gauche » et $\vec{f} = (f_1, f_2)$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert contenant K , peut être utilisée pour déterminer l'aire d'une surface plane : en effet, en prenant $f_2 = x$ et $f_1 = 0$ (resp. $f_1 = -y$ et $f_2 = 0$), on obtient

$$\iint_K dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} x \, dy \quad \left(\text{resp. } \iint_K dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} -y \, dy \right).$$

Utiliser ce fait pour calculer l'aire d'une ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$).

L'aire d'une ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) vaut πab .

5. Un champ électrique est donné par

$$\vec{B} = (e^x + 2y + \sin(x^2 z)) \vec{e}_1 + (12x + \arctan(yz)) \vec{e}_2 + \cos(xyz) \vec{e}_3$$

Calculer la circulation de ce champ électrique le long de l'ellipse \mathcal{E} d'équation cartésienne $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. (Sugg. : remplacer l'intégrale curviligne par une autre)

Le théorème de Stokes stipule que la circulation cherchée est égale à

$$\iint_S \text{rot}(\vec{B}) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

où S est la surface planaire délimitée par l'ellipse et où \vec{n} est la normale unitaire à cette surface. Si on choisit $\vec{n} = \vec{e}_3$ comme vecteur normal unitaire, il vient que

$$\text{rot}(\vec{B}) \cdot \vec{n} = (\star, \star, 10) \cdot (0, 0, 1) = 10$$

et donc que la circulation de \vec{B} le long de l'ellipse, dans le sens trigonométrique, est donnée par

$$\iint_S 10 \, d\sigma = 10 \iint_S d\sigma = 20\pi$$

puisque $\iint_S d\sigma$ correspond à l'aire de l'ellipse, à savoir 2π (cf. exercice précédent).