1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales B : corrigé du test 2

Version 6 mars 2017

Test 2 du 22-3-2017 et du 23-3-2017

1. **En appliquant la définition de la dérivabilité, dire si la fonction f donnée explicitement par**
$$f:(x,y)\mapsto f(x,y)=\frac{y^2-2xy}{2y-x}$$
est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(0,2)$.
Si oui, donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

Solution. Comme f est défini sur $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 2y\right\}$, que $f(0,y)=\dfrac{y^2}{2y}=\dfrac{y}{2}$ et $f(0,2)=\dfrac{2}{2}=1$, on a

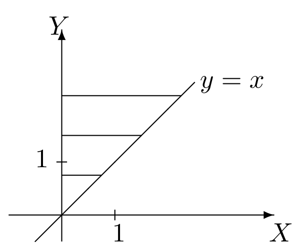
$$\lim_{y\to 2}\frac{f(0,y)-f(0,2)}{y-2}=\lim_{y\to 2}\frac{\frac{y}{2}-1}{y-2}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{2(y-2)}=\frac{1}{2}.$$

Puisque la limite existe et est finie, la fonction f est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(0,2)$ et sa dérivée vaut $\frac{1}{2}$.

2. Soit
$$I=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^y f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

a) Dans un repère orthonormé, représenter, en le hachurant, l'ensemble d'intégration A.
b) Permuter l'ordre d'intégration.
c) Peut-on toujours permuter l'ordre d'intégration et être certain d'obtenir la même valeur que l'intégrale donnée ? Si oui, pourquoi ? Si non, que faudrait-il vérifier ?

Solution. a) L'ensemble d'intégration est $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\ [0,+\infty[,\ x\in[0,y]\}$ et voici sa représentation graphique



b) Comme $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\ [0,+\infty[,\ y\in[x,+\infty[\}$, en permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I'=\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} f(x,y)\ dy\right)\ dx.$$

c) Non. En permutant l'ordre d'intégration, on n'obtiendra la même valeur pour les deux intégrales qu'à condition que la fonction soit intégrable.

Test 2 du 24-3-2017

1. **Soit** $F(x,y,z) = g(u(x,y,z), v(x,y,z))$ **où**

$$u(1,0,-1) = 2 \quad (D_x u)(1,0,-1) = 1 \quad (D_y u)(1,0,-1) = 2 \quad (D_z u)(1,0,-1) = 3$$

$$v(1,0,-1) = -1 \quad (D_x v)(1,0,-1) = -2 \quad (D_y v)(1,0,-1) = 0 \quad (D_z v)(1,0,-1) = 2$$

$$(D_u g)(2,-1) = 3 \quad \textbf{et} \quad (D_v g)(2,-1) = -4.$$

En supposant F **dérivable en ce point, que vaut** $(D_y F)(1,0,-1)$ **?**

Solution. Comme $u(1,0,-1) = 2$ et $v(1,0,-1) = -1$, on a

$$(D_y F)(1,0,-1) = (D_u g)(2,-1)(D_y u)(1,0,-1) + (D_v g)(2,-1)(D_y v)(1,0,-1) = 3.2 + (-4).0 = 6.$$

2. Si elle existe, calculer l'intégrale

$$I = \iint_A \cos(x^2 + y^2)\ dx\, dy$$

si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$**.**

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble borné fermé ; elle est donc intégrable sur A. En passant aux coordonnées polaires ($x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ où $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$), on a

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} r\ \cos(r^2)\ d\theta \right) dr$$

vu la bijection entre A et $A' = [1, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi[$, le jacobien valant r.

Dès lors,

$$I = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} r\ \cos(r^2)\, dr = \pi \left[\sin(r^2)\right]_1^{\sqrt{2}} = \pi(\sin(2) - \sin(1)).$$

Test 2 du 28-3-2017

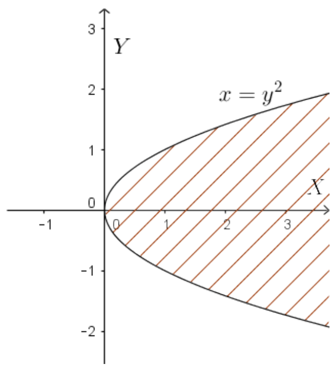
1. **On donne la fonction f explicitement par $f(x,y) = \sqrt{x-y^2}$. Déterminer ses domaines de définition et de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.**

Solution. Le domaine de définition de f est l'ensemble

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \geq 0\right\}.$$

Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 > 0\right\}.$$

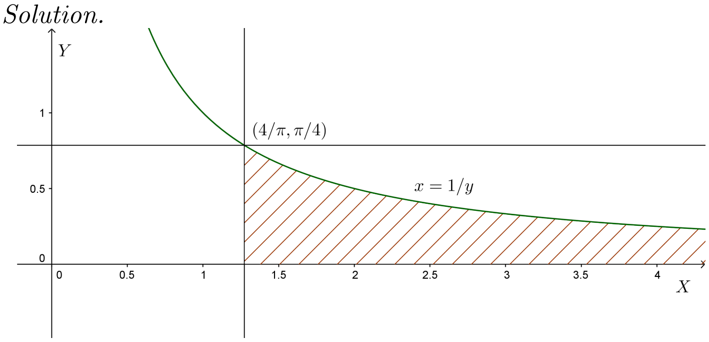


L'ensemble A est l'ensemble des points situés à l'intérieur de la parabole (partie hachurée), bords compris.
L'ensemble B est l'ensemble des points situés à l'intérieur de la parabole (partie hachurée), bords exclus.

2. **Si c'est possible, calculer**

$$I = \int_0^{\pi/4} \left(\int_{4/\pi}^{1/y} \frac{\sin(y)}{x^2}\, dx \right) dy.$$

Solution.



L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points de la partie hachurée ; c'est un ensemble non borné.

La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{\sin(y)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$ donc sur A.
De plus, $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A$.
Si y est fixé dans $]0, \frac{\pi}{4}]$, la fonction $g : x \mapsto \frac{\sin(y)}{x^2}$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[4/\pi, 1/y]$.
Elle est donc intégrable sur cet intervalle et son intégrale vaut

$$\int_{4/\pi}^{1/y} \frac{\sin(y)}{x^2}\, dx = \left[\frac{-\sin(y)}{x}\right]_{4/\pi}^{1/y} = \sin(y)\left(\frac{\pi}{4} - y\right).$$

La fonction $h : y \mapsto \sin(y)\left(\frac{\pi}{4} - y\right)$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{4}]$; elle est donc intégrable sur cet intervalle et, dès lors, f est intégrable sur A.

Comme f est positif en tout point de A, l'intégrale demandée s'obtient en intégrant par parties la fonction h sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Ainsi, on obtient

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin(y)\left(\frac{\pi}{4} - y\right) dy = \left[-\cos(y)\left(\frac{\pi}{4} - y\right)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \cos(y)\, dy = \frac{\pi}{4} - [\sin(y)]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$