1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Questionnaire et Corrigé
Examen de mathématiques générales B du 15 mai 2017

Version 22 mai 2017

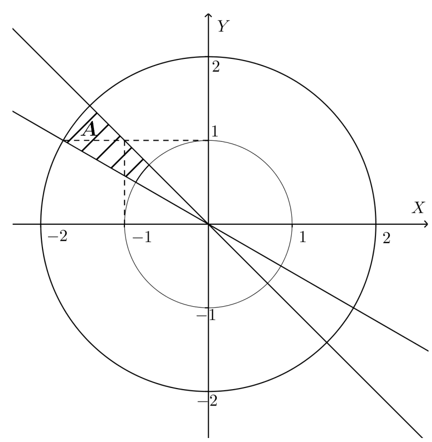
QUESTIONNAIRE

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 1}$.
(a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.
(c) Calculer l'expression $D_y f(x,y)$.
(d) Déterminer l'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(e^t + 1, e^t - 1)$, son domaine de dérivabilité et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \ln(1-x)^2.$$
(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite des restes de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

3. On donne
$$I = \iint_A \ln(y)\ dx\ dy,$$
et l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0 \ \text{ et } \ 0 < y \le \exp(x)\}$.
(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
(b) Si possible, déterminer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

4. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{x^2}$. Si c'est possible, calculer
$$I = \iint_A f(x,y)\ dx\ dy.$$



5. (a) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Est-elle diagonalisable ? Justifier.

(b) Soit la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 4\sin(a) & 2\sin^3(a) \\ 2\cos(a) & \cos^3(a) \end{pmatrix}.$$
Pour quelles valeurs du paramètre $a \in [0, \pi[$ est-elle inversible ? Justifier. Calculer alors la matrice inverse de B.

6. (a) La série suivante est-elle convergente ? Justifier.

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\cos(j)}{j^2}$$

(b) La série suivante est-elle convergente ? Si la réponse est oui, en déterminer la somme.

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2^m}{e^{m+1}}$$

7. Un étudiant arrive souvent en retard :
- une fois sur deux lorsqu'il n'est pas arrivé en retard la veille ;
- une fois sur trois lorsqu'il est arrivé en retard la veille.
Quelle est la probabilité qu'à long terme il n'arrive pas en retard ? Justifier !

8. Pour les physiciens uniquement
(a) Dans un repère orthonormé du plan, on considère l'arc $\mathcal{P}_{AB}$ de la parabole d'équation cartésienne $y = x^2$ joignant les points $A(0,0)$ et $B(2,4)$.
Calculer (si possible) les intégrales suivantes

$$(1) \int_{\mathcal{P}_{AB}} x\ ds, \qquad (2) \int_{\mathcal{P}_{AB}} x\ dx, \qquad (3) \int_{\mathcal{P}_{AB}} x\ dy.$$

Pour chacune d'elles, obtient-on la même valeur quelle que soit l'orientation de la courbe $\mathcal{P}_{AB}$, que ce soit de A vers B ou de B vers A ?

(b) Déterminer explicitement la solution f de l'équation différentielle

$$x^2 D^2 f(x) + x D f(x) = 0, \qquad x \in]0, +\infty[,$$

satisfaisant les conditions $f(1) = 0$ et $Df(1) = 1$.

CORRIGÉ

Exercices

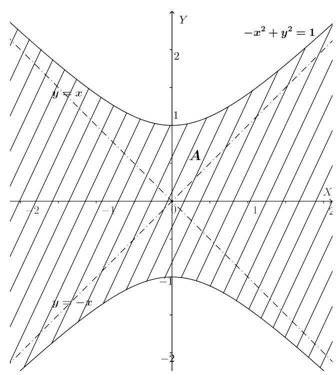
1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 1}$.**
(a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.

Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur l'ensemble A décrit par

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + 1 > 0\right\}.$$

(b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble A (partie hachurée) : les points de l'hyperbole d'équation cartésienne $-x^2 + y^2 = 1$ sont exclus de l'ensemble.



(c) Calculer l'expression $D_y f(x,y)$.

Solution. En un point de A, on a

$$D_y f(x,y) = D_y\left(\sqrt{x^2 - y^2 + 1}\right) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2 + 1}}.$$

(d) Déterminer l'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(e^t + 1, e^t - 1)$, son domaine de dérivabilité et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

Solution. L'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(e^t + 1, e^t - 1)$ est donnée par

$$F(t) = \sqrt{(e^t + 1)^2 - (e^t - 1)^2 + 1} = \sqrt{4e^t + 1}.$$

La fonction F est dérivable sur $\{t \in \mathbb{R} : 4e^t + 1 > 0\} = \mathbb{R}$ et on a

$$DF(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{4e^t + 1}}.$$

2. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \ln(1-x)^2.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si $x < 1$, ce qui est le cas au voisinage de 0, alors $1 - x > 0$ et, dès lors, $f(x) = 2\ln(1-x)$. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = \frac{-2}{1-x} = \frac{2}{x-1}, \quad D^2f(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad D^3f(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Comme $f(0) = 0$, $Df(0) = -2$ et $D^2f(0) = -2$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = -2x \quad \text{et} \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = -2x - x^2, \ x \in \mathbb{R}.$$

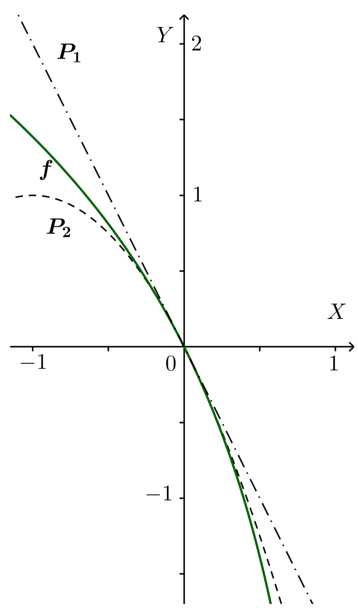
(b) Donner une expression explicite des restes de ces approximations.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in]-\infty, 1[$, il existe u_1, u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = \frac{-2}{(u_1-1)^2}.\frac{x^2}{2!} = \frac{-x^2}{(u_1-1)^2}, \quad R_2(x) = \frac{4}{(u_2-1)^3}.\frac{x^3}{3!} = \frac{2x^3}{3(u_2-1)^3}.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

Solution. Comme $R_1(x) \leq 0 \ \forall x \in]-\infty, 1[$, le graphique de f est situé en dessous de celui de l'approximation P_1. Comme $R_2(x) \geq 0 \ \forall x \in]-\infty, 0[$ et $R_2(x) \leq 0 \ \forall x \in]0, 1[$, le graphique de f est situé au-dessus de celui de P_2 à gauche de 0 et en dessous de celui de P_2 à droite de 0.
Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.

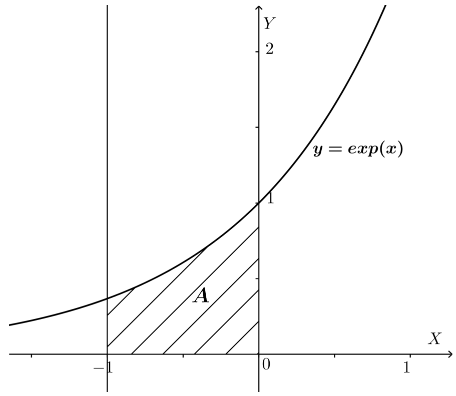


3. **On donne**

$$I = \iint_A \ln(y) \ dx \ dy,$$

et l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0$ et $0 < y \leq \exp(x)\}$.
(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble sauf ceux de l'axe des abscisses.



(b) Si possible, déterminer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \ln(y)$ est continue et négative sur A, ensemble borné mais non fermé.

Etudions l'intégrabilité de f sur A.
Pour x fixé dans $[-1, 0]$, la fonction $h : y \mapsto |\ln(y)| = -\ln(y)$ est continue sur $]0, e^x]$. Pour tout $t > 0$, calculons $\lim_{t \to 0^+} \int_t^{e^x} (-\ln(y))\ dy$. Si cette limite est finie alors h sera intégrable en 0 donc sur $]0, e^x]$. Par une intégration par parties, on a

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^{e^x} (-\ln(y))\ dy = \lim_{t\to 0^+} [-y\ln(y) + y]_t^{e^x} = \lim_{t\to 0^+} [e^x(1-x) - t(1 - \ln(t)] = e^x(1-x)$$

car $\lim_{t\to 0^+} [t(\ln(t) - 1)] = 0$. En effet, on a une indétermination du type $0 \ . \ \infty$ qu'on lève en utilisant le théorème de l'Hospital à la fonction $t \mapsto t(1 - \ln(t)) = \dfrac{1 - \ln(t)}{t^{-1}}$, les hypothèses du théorème étant satisfaites dans $V =]0, +\infty[$. Ainsi,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1 - \ln(t)}{t^{-1}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{D(1 - \ln(t))}{D\ t^{-1}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-t^{-1}}{-t^{-2}} = \lim_{t\to 0^+} t = 0.$$

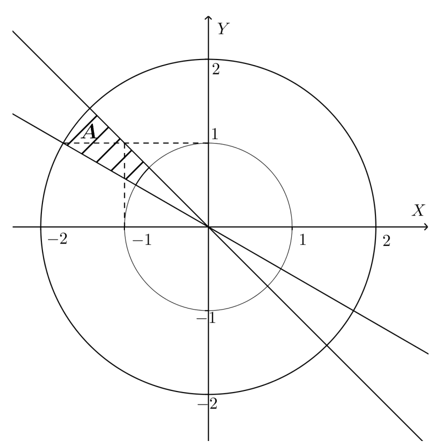
La limite étant finie, h est intégrable sur $]0, e^x]$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $e^x(1-x)$.

Considérons $g : x \mapsto e^x(1-x)$, fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[-1, 0]$; cette fonction est donc intégrable sur $[-1, 0]$ et, dès lors f est intégrable sur A.
Ainsi, puisque la fonction f est négative sur A, par une intégration par parties, on a

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_0^{e^x} \ln(y)\ dy \right) dx = \int_{-1}^{0} e^x(x-1)\ dx = [e^x(x-1) - e^x]_{-1}^{0} = -2 + \frac{3}{e}.$$

4. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2 + y^2}{x^2}$. Si c'est possible, calculer**

$$I = \iint_A f(x, y)\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{x^2}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Les abscisses et ordonnées des points d'intersection des cercles avec les droites intervenant dans les bords de A permettent de conclure que ces droites ont pour équation cartésienne $y = -x$ ou encore $y = \text{tg}(3\pi/4)x$ et $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,x$ ou encore $y = \text{tg}(5\pi/6)x$. Ainsi, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$A' = \left\{(r,\theta) : r \in [1,2],\ \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right\}.$$

La fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta)) = \frac{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)} = \frac{r^2}{r^2\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{r}{\cos^2(\theta)}\, d\theta\right) dr &= \int_1^2 r\ dr\ .\ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2(\theta)}\, d\theta \\
&= \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2\ .\ [\text{tg}(\theta)]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
&= \left(\frac{4-1}{2}\right)\left(\text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \text{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3} + 1\right) \\
&= \frac{3-\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

5. **(a) Soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Est-elle diagonalisable ? Justifier.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & i & 1 \\ i & -\lambda & i \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
En appliquant la première loi des mineurs à la troisième ligne, on a

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & i & 1 \\ i & -\lambda & i \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} i & 1 \\ -\lambda & i \end{pmatrix} - \lambda\ \det \begin{pmatrix} -\lambda & i \\ i & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -1 + \lambda - \lambda(\lambda^2+1) = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

Ainsi, le polynôme caractéristique admet 3 valeurs propres simples et la matrice A est donc diagonalisable.

(b) Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4\sin(a) & 2\sin^3(a) \\ 2\cos(a) & \cos^3(a) \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs du paramètre $a \in [0, \pi[$ est-elle inversible ? Justifier. Calculer alors la matrice inverse de B.

Solution. La matrice B est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. En mettant $2\sin(a)$ en évidence sur la première ligne et $\cos(a)$ en évidence sur la deuxième ligne, on a

$$\det(B) = 2\sin(a)\cos(a)\det\begin{pmatrix} 2 & \sin^2(a) \\ 2 & \cos^2(a) \end{pmatrix}$$

$$= \sin(2a)\ 2(\cos^2(a) - \sin^2(a)) = 2\sin(2a)\cos(2a) = \sin(4a).$$

Dès lors, la matrice B est inversible si et seulement si $\sin(4a) \neq 0 \Leftrightarrow 4a \neq k\pi \Leftrightarrow a \neq k\frac{\pi}{4},\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, \pi[$, B admet un inverse pour tout a différent de 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

La matrice des cofacteurs des éléments de B est égale à

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos^3(a) & -2\cos(a) \\ -2\sin^3(a) & 4\sin(a) \end{pmatrix}.$$

Dès lors, la matrice inverse de B est égale à

$$B^{-1} = \frac{1}{\sin(4a)} \begin{pmatrix} \cos^3(a) & -2\sin^3(a) \\ -2\cos(a) & 4\sin(a) \end{pmatrix}.$$

6. **(a) La série suivante est-elle convergente ? Justifier.**

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\cos(j)}{j^2}$$

Solution. Comme on a $\left|\frac{\cos(j)}{j^2}\right| \leq \frac{1}{j^2}$ et comme $\frac{1}{j^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente puisque $\alpha = 2 > 1$, le critère de comparaison permet de conclure que la série donnée converge.

(b) La série suivante est-elle convergente ? Si la réponse est oui, en déterminer la somme.

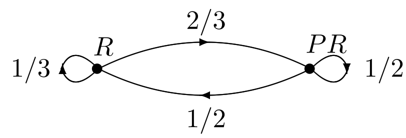
$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2^m}{e^{m+1}}$$

Solution. La série $\displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2^m}{e^{m+1}} = \frac{1}{e}\sum_{m=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^m$ est une série géométrique dont la raison $\frac{2}{e} \in]-1, 1[$. Cette série est donc convergente et sa somme vaut

$$\frac{1}{e}\ \left(\frac{2}{e}\right)^2 \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^m = \frac{4}{e^3}\ \frac{1}{1-\frac{2}{e}} = \frac{4}{e^3}\ \frac{e}{e-2} = \frac{4}{e^2(e-2)}.$$

7. **Un étudiant arrive souvent en retard :**
- une fois sur deux lorsqu'il n'est pas arrivé en retard la veille ;
- une fois sur trois lorsqu'il est arrivé en retard la veille.
Quelle est la probabilité qu'à long terme il n'arrive pas en retard ? Justifier !

Solution. Schématiquement, on peut représenter la situation comme suit



Notons R_i (PR_i) le fait d'être arrivé en retard (pas en retard) le jour i ($i = 1, 2, 3\ldots$). On a alors

$$\begin{pmatrix} PR_2 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PR_1 \\ R_1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ est une matrice stochastique régulière ; elle admet donc 1 comme valeur propre. Déterminons ses vecteurs propres relatifs à cette valeur propre en cherchant les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $(M - 1\ .I)X = 0$, la matrice I étant la matrice identité de dimension 2. On a

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 2/3 \\ 1/2 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4y}{3}.$$

Les vecteurs propres de M relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}_0$.

Parmi ces vecteurs, le vecteur de probabilité est celui pour lequel $\frac{4}{3}c + c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{7}$. Dès lors, à long terme, l'étudiant a 4 chances sur 7 ($\frac{4}{3}\ .\ \frac{3}{7}$) de ne pas arriver en retard.

8. **(a) Dans un repère orthonormé du plan, on considère l'arc $\mathcal{P}_{AB}$ de la parabole d'équation cartésienne $y = x^2$ joignant les points $A(0, 0)$ et $B(2, 4)$.**
Calculer (si possible) les intégrales suivantes

$$(1) \int_{\mathcal{P}_{AB}} x\ ds, \qquad (2) \int_{\mathcal{P}_{AB}} x\ dx, \qquad (3) \int_{\mathcal{P}_{AB}} x\ dy.$$

Pour chacune d'elles, obtient-on la même valeur quelle que soit l'orientation de la courbe $\mathcal{P}_{AB}$, que ce soit de A vers B ou de B vers A ?

Solution. L'arc de parabole est paramétré par $(t, t^2),\ t \in [0, 2]$.
Il s'ensuit que

$$\int_{\mathcal{P}_{AB}} x\ ds = \int_0^2 t\ \sqrt{1 + 4t^2}\ dt = \frac{1}{12}\left[\left(1 + 4t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{\sqrt{17^3} - 1}{12}$$

et l'orientation de la courbe n'a pas d'importance.
Les deux autres intégrales dépendent de l'orientation ; si on choisit celle déterminée par le paramétrage ci-dessus, on a

$$\int_{\mathcal{P}_{AB}} x\ dx = \int_0^2 t\ dt = 2, \qquad \int_{\mathcal{P}_{AB}} x\ dy = \int_0^2 t\ 2t\ dt = \frac{16}{3}.$$

(b) Déterminer explicitement la solution f de l'équation différentielle

$$x^2 D^2 f(x) + xDf(x) = 0, \qquad x \in]0, +\infty[,$$

satisfaisant les conditions $f(1) = 0$ et $Df(1) = 1$.
Solution. Si $f \in C_2(\mathbb{R})$, on a

$$(xD)^2 f(x) = (xD)(xD)f(x) = xDf(x) + x^2 D^2 f(x).$$

Dès lors, l'équation donnée est équivalente à

$$D^2 F(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$$

avec $F(t) = f(e^t),\ t \in \mathbb{R}$. Comme $D^2F = 0$ si et seulement si il existe des constantes c_1, c_2 telles que

$$F(t) = c_1 t + c_2,\ t \in \mathbb{R}$$

l'équation de départ a pour solution l'ensemble des fonctions

$$f(x) = F(\ln(x)) = c_1 \ln(x) + c_2,\ x > 0.$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes : $f(1) = 0$ et $Df(1) = 1$ si et seulement si $c_2 = 0$ et $c_1 = 1$. La réponse à la question posée est donc la fonction

$$f(x) = \ln(x),\ x > 0.$$