1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Corrigé de l'examen de math B du 17 août 2017
chimistes, géographes, géologues et physiciens

Version 19 août 2017

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f par $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.
   a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2$ en 0.
   b) Dans un même repère orthonormé, représenter (au voisinage de 0) le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.
2. Soient un réel a et la matrice
$$A = \left(\begin{array}{cc} \mathrm{tg}(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & \cos(a-\pi) \end{array} \right).$$
   a) Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in [0, 2\pi]$ la matrice est-elle inversible ? Justifier.
   b) Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.

3. Une étude relative à la présence au travail en hiver a montré que les salariés peuvent être en bonne santé (B) ou être enrhumés (R) ou être grippés (G) ; dans les deux premiers cas, ils sont présents au travail sinon ils restent chez eux. D'un jour à l'autre, on constate les évolutions suivantes
   - étant en bonne santé, un salarié a 3 chances sur 5 de le rester le lendemain et 2 chances sur 5 de devenir enrhumé
   - étant enrhumé, il a 1 chance sur 4 de le rester le jour suivant, 1 chance sur 4 d'avoir la grippe mais aussi 1 chance sur 2 d'être guéri
   - enfin, étant grippé, il a 1 chance sur 2 de rester grippé et 1 chance sur 2 d'être en bonne santé.
   a) Déterminer la matrice de transition.
   b) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un salarié ne soit pas présent au travail.

4. On donne la fonction f par
$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + i \ \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$
   a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Représenter ce domaine.
   b) En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable et la dérivée par rapport à sa seconde variable ?
   c) En utilisant l'expression des dérivées obtenues précédemment, montrer que
$$D_x f(x,y) + i D_y f(x,y) = 0.$$
5. a) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale $\iint_E (3y^2 + xy^2)\ dx\ dy$ sur $E = [-1, 2] \times [-1, 3]$ et représenter l'ensemble d'intégration E en le hachurant.
   b) On donne l'ensemble fermé non borné E suivant
$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x, y \geq 0, \ y^2 \leq x^2 \leq 1 + y^2\right\}.$$
   b.1) Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé en le hachurant.
   b.2) Si f est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$, exprimer la valeur de son intégrale sur E en intégrant successivement par rapport à y (resp. x) puis par rapport à x (resp. y).
   b.3) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pourquoi ?

6. On considère la succession d'intégrales simples suivante
$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}\, dx \right) dy.$$
   a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.
   b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

7. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-e)^m}{e^{2m+3}}, \qquad\qquad (ii)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}))^m}{m!}.$$

Pour les physiciens uniquement

8. a) Dans un repère orthonormé du plan, on considère l'arc $\mathcal{C}_{AB}$ de la courbe d'équation cartésienne $y = \frac{x^3}{3}$ joignant les points $A(0,0)$ et $B\left(2, \frac{8}{3}\right)$.
Calculer (si possible) les intégrales suivantes

$$(1) \int_{\mathcal{C}_{AB}} x^3\ ds, \qquad\qquad (2) \int_{\mathcal{C}_{AB}} x^3\ dx, \qquad\qquad (3) \int_{\mathcal{C}_{AB}} x^3\ dy.$$

Pour chacune d'elles, obtient-on la même valeur quelle que soit l'orientation de l'arc $\mathcal{C}_{AB}$, que ce soit de A vers B ou de B vers A ?

b) Déterminer explicitement la solution f de l'équation différentielle

$$Df(x) - 3x^2 f(x) = e^{x^3}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

satisfaisant la condition $f(0) = 1$.

CORRIGÉ

Exercices

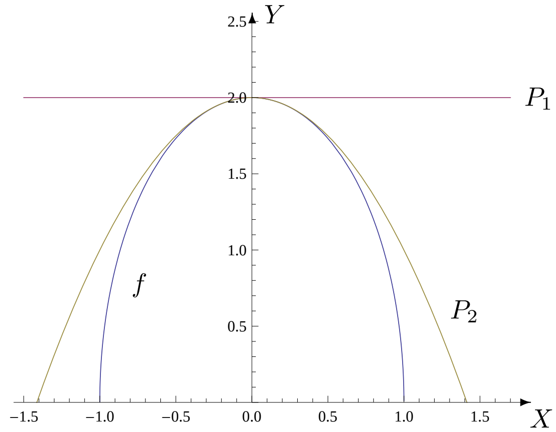
1. **On donne la fonction f par $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.**
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2$ en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter (au voisinage de 0) le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $]-1,1[$ et on a $Df(x) = -2x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ et

$$D^2 f(x) = -2(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} - 2x^2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}} = 2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}(-1+x^2-x^2) = -2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}.$$

Comme $f(0) = 2,\ Df(0) = 0$ et $\ D^2 f(0) = -2$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 2, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2 f(0)}{2!}x^2 = 2 - x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$



2. **Soient un réel a et la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} \text{tg}(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & \cos(a-\pi) \end{pmatrix}.$$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in [0, 2\pi]$ la matrice est-elle inversible ? Justifier.
b) Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.

Solution. a) La matrice A est définie si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ et inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Comme $\text{tg}(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$ et $\cos(a - \pi) = -\cos(a)$, on a

$$\det A = -\sin(a) - 2\sin(a)\cos(a) = -\sin(a)(1 + 2\cos(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq k\pi \text{ et } a \neq \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

Ainsi, comme $a \in [0, 2\pi]$ et $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), la matrice A est inversible pour tout a différent de 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π.

b) La matrice des cofacteurs de A étant égale à

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\cos(a) & -\sin(a) \\ -2\cos(a) & \text{tg}(a) \end{pmatrix},$$

l'inverse de A est la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\sin(a)(1 + 2\cos(a))} \begin{pmatrix} \cos(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & -\text{tg}(a) \end{pmatrix}, \ a \in]0, 2\pi[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

et on a

$$A.A^{-1} = \frac{1}{\sin(a)(1 + 2\cos(a))} \begin{pmatrix} \text{tg}(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & -\cos(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & -\text{tg}(a) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin(a)(1 + 2\cos(a))} \begin{pmatrix} \sin(a) + 2\cos(a)\sin(a) & 2\,\text{tg}(a)\cos(a) - 2\,\text{tg}(a)\cos(a) \\ \sin(a)\cos(a) - \sin(a)\cos(a) & 2\sin(a)\cos(a) + \sin(a) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin(a)(1 + 2\cos(a))} \begin{pmatrix} \sin(a)(1 + 2\cos(a)) & 0 \\ 0 & \sin(a)(1 + 2\cos(a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Une étude relative à la présence au travail en hiver a montré que les salariés peuvent être en bonne santé (B) ou être enrhumés (R) ou être grippés (G) ; dans les deux premiers cas, ils sont présents au travail sinon ils restent chez eux. D'un jour à l'autre, on constate les évolutions suivantes**

- étant en bonne santé, un salarié a 3 chances sur 5 de le rester le lendemain et 2 chances sur 5 de devenir enrhumé
- étant enrhumé, il a 1 chance sur 4 de le rester le jour suivant, 1 chance sur 4 d'avoir la grippe mais aussi 1 chance sur 2 d'être guéri
- enfin, étant grippé, il a 1 chance sur 2 de rester grippé et 1 chance sur 2 d'être en bonne santé.
a) Déterminer la matrice de transition.
b) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un salarié ne soit pas présent au travail.

Solution. a) Soient B_0, G_0 et R_0 respectivement l'état de santé fixé au départ et B_1, G_1 et R_1 respectivement le lendemain. On a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ G_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ G_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de tansition T est

$$T = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

b) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2/5 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4x + 5y + 5z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 8x - 15z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{15}{4} y \\ z = 2y \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(15 + 4 + 8) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{27}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{27} \\ \frac{8}{27} \end{pmatrix}$$

et la probabilité qu'à long terme un salarié ne soit pas présent au travail est de $4/27$.

4. **On donne la fonction f par**

$$f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + i \text{ arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Représenter ce domaine.
b) En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable et la dérivée par rapport à sa seconde variable ?
c) En utilisant l'expression des dérivées obtenues précédemment, montrer que

$$D_x f(x, y) + i D_y f(x, y) = 0.$$

Solution. a) Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>0,\ \sqrt{x^2+y^2}>0,\ x \neq 0\right\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\} = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}.$$

La représentation graphique de cet ensemble est constituée de tous les points du plan sauf ceux de l'axe des ordonnées.

b) En un point de A, on a

$$D_x f(x,y) = D_t \ln(t)\big|_{t=\sqrt{x^2+y^2}} \ .\ D_v \sqrt{v}|_{v=x^2+y^2} \ .\ D_x(x^2+y^2) + iD_t \mathrm{arctg}(t)|_{t=y/x} \ .\ D_x\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \ .\ 2x + i\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \ \cdot\ \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

et

$$D_y f(x,y) = D_t \ln(t)\big|_{t=\sqrt{x^2+y^2}} \ .\ D_v \sqrt{v}|_{v=x^2+y^2} \ .\ D_y(x^2+y^2) + iD_t \mathrm{arctg}(t)|_{t=y/x} \ .\ D_y\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \ .\ 2y + i\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \ \cdot\ \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y+ix}{x^2+y^2}$$

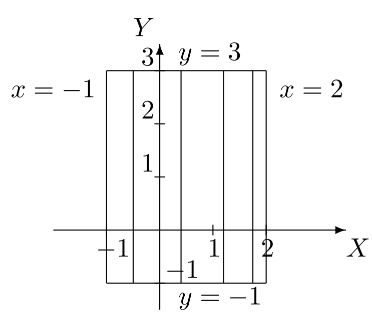
c) Dès lors, on a

$$D_x f(x,y) + iD_y f(x,y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + \frac{iy+i^2x}{x^2+y^2} = 0.$$

Remarque : comme $x^2+y^2>0$, on peut écrire $\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, ce qui permet de calculer plus rapidement les dérivées partielles.

5. **a) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale** $\iint_E (3y^2+xy^2)\ dx\ dy$ **sur** $E = [-1,2]\times[-1,3]$ **et représenter l'ensemble d'intégration** E **en le hachurant.**

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration E ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x,y) \mapsto 3y^2+xy^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur E, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_E (3y^2+xy^2)\ dx\ dy = \int_{-1}^{2}\left(\int_{-1}^{3}(3y^2+xy^2)\ dy\right)\ dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\Big[(3+x)y^3\Big]_{y=-1}^{y=3}\ dx$$

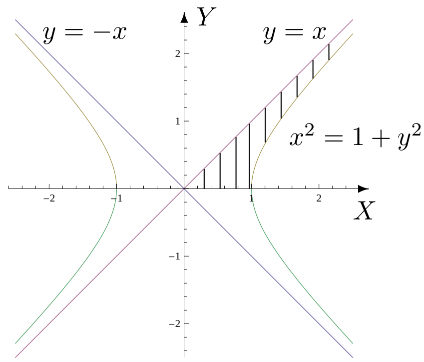
$$= \frac{28}{3}\int_{-1}^{2}(3+x)\ dx = \frac{28}{3}\left[3x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{28}{3}\left(6+2+3-\frac{1}{2}\right) = \frac{28}{3}\ .\ \frac{21}{2} = 98.$$

b) On donne l'ensemble fermé non borné E suivant

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x, y \geq 0, \ y^2 \leq x^2 \leq 1 + y^2\right\}.$$

b.1) Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé en le hachurant.
b.2) Si f est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, exprimer la valeur de son intégrale sur E en intégrant successivment par rapport à y (resp. x) puis par rapport à x (resp. y).
b.3) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pourquoi ?

Solution. b.1) La représentation graphique de l'ensemble d'intégration est la suivante ; les points des 'bords" sont compris dans l'ensemble.



b.2) L'intégrale de f sur E est donnée par

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{+\infty}\left(\int_y^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)\ dx\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\ dy\right) dx + \int_1^{+\infty}\left(\int_{\sqrt{x^2-1}}^x f(x,y)\ dy\right) dx.$$

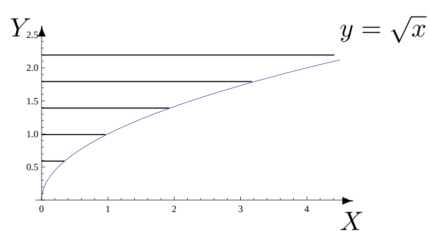
b.3) On trouve la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration car la fonction est intégrable sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ donc sur E.

6. **On considère la succession d'intégrales simples suivante**

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{y^2} \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2-x}}\,dx\right) dy.$$

a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.
b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. a) L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [0,y^2]\}$, ensemble non borné dont la représentation graphique se trouve ci-dessous (partie hachurée) ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



b) La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2-x}}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5y^2 - x > 0\}$ donc sur son ensemble d'intégration $A \setminus \{(0,0)\}$. Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$.

Pour y fixé dans $]0,+\infty[$, la fonction $g : x \mapsto \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2-x}}$ est continue sur le fermé borné $[0,y^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{y^2} \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2-x}}\, dx = (-e^{-y}) \,.\, \left[2\sqrt{5y^2-x}\right]_0^{y^2} = 2(\sqrt{5}-2)y\, e^{-y}.$$

La fonction $h : y \mapsto 2(\sqrt{5}-2)y\, e^{-y}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$ non borné. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, en intégrant par parties, on a

$$\int_0^t 2(\sqrt{5}-2)y\, e^{-y}\, dy = 2(\sqrt{5}-2)\left([-ye^{-y}]_0^t + \int_0^t e^{-y}\, dy\right) = 2(\sqrt{5}-2)(-te^{-t}-e^{-t}+1)$$

Dès lors, comme

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} (te^{-t}) = 0$$

puisque, par application du théorème de l'Hospital, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste à l'infini, on a

$$\lim_{t\to+\infty} 2(\sqrt{5}-2)(-te^{-t}-e^{-t}+1) = 2(\sqrt{5}-2).$$

Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2-y}}\, dy\right) dx = 2(\sqrt{5}-2).$$

7. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-e)^m}{e^{2m+3}}, \qquad\qquad (ii)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}))^m}{m!}.$$

Solution. (i) La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-e)^m}{e^{2m+3}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\displaystyle\frac{1}{e^3}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{e}\right)^m$, série géométrique convergente puisque la raison $\dfrac{-1}{e} \in]-1,1[$. La somme de cette série vaut

$$\frac{1}{e^3}\,.\,\left(\frac{-1}{e}\right)\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{e}\right)^m = \left(\frac{-1}{e^4}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{e}} = \frac{-1}{e^3(e+1)}.$$

(ii) La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}))^m}{m!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$. La somme de cette série vaut donc $\exp(\sqrt{3})-1$.

Pour les physiciens uniquement

8. **a) Dans un repère orthonormé du plan, on considère l'arc $\mathcal{C}_{AB}$ de la courbe d'équation cartésienne $y = \frac{x^3}{3}$ joignant les points $A(0,0)$ et $B\left(2,\frac{8}{3}\right)$.**
Calculer (si possible) les intégrales suivantes

$$(1)\int_{\mathcal{C}_{AB}} x^3\, ds, \qquad (2)\int_{\mathcal{C}_{AB}} x^3\, dx, \qquad (3)\int_{\mathcal{C}_{AB}} x^3\, dy.$$

Pour chacune d'elles, obtient-on la même valeur quelle que soit l'orientation de l'arc $\mathcal{C}_{AB}$, que ce soit de A vers B ou de B vers A ?

Solution. Un paramétrage (injectif) de la courbe $\mathcal{C}_{AB}$ est donné par

$$\vec{\gamma} \,:\, t \in [0,2] \mapsto \left[t,\ \frac{t^3}{3}\right].$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t) = \left[1,\ t^2\right] \neq \vec{0} \quad \forall t \in \ ]0,2[\,,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D\vec{\gamma}(t)\| = \sqrt{1+t^4}.$$

(1) Comme l'intégrant $f:(x,y) \mapsto x^3$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}_{AB}$, l'intégrale a un sens, et on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_{AB}} x^3\ ds &= \int_0^2 t^3\,\sqrt{1+t^4}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^2 D\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+t^4}\right)^3\right)\ dt\\ &= \frac{1}{6}\left[\left(\sqrt{1+t^4}\right)^3\right]_0^2 = \frac{17\sqrt{17}-1}{6}.\end{aligned}$$

(2) Comme l'intégrant $f:(x,y) \mapsto x^3$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}_{AB}} x^3\ dx = \int_0^2 t^3\ .\ 1\ dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 = 4.$$

(3) Comme l'intégrant $f:(x,y) \mapsto x^3$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}_{AB}} x^3\ dy = \int_0^2 t^3\ t^2\ dt = \left[\frac{t^6}{6}\right]_0^2 = \frac{32}{3}.$$

La première intégrale est indépendante de l'orientation de la courbe $\mathcal{C}_{AB}$ alors que les deux autres en dépendent et correspondent à l'orientation de A vers B.
Notons que, en considérant l'orientation de B vers A, les deux dernières intégrales prendraient les valeurs opposées à celles déterminées ci-dessus.

b) Déterminer explicitement la solution f de l'équation différentielle

$$Df(x) - 3x^2 f(x) = e^{x^3}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

satisfaisant la condition $f(0) = 1$.
Solution. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1, à second membre linéaire : elle se réécrit

$$Df(x) = a(x)\,f(x) + b(x)$$

où $a : x \mapsto 3x^2$ et $b : x \mapsto e^{x^3}$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Dès lors, l'équation admet (au moins) une solution sur $\mathbb{R}$ et, comme nous disposons d'une condition initiale en $0 \in \mathbb{R}$, nous pouvons en déterminer une solution unique sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.
Nous avons

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 3x^2\ dx \simeq x^3, \qquad x \in I$$

et

$$P(x) = \int b(x)e^{-A(x)}\ dx = \int e^{x^3}e^{-x^3}\ dx \simeq x, \qquad x \in I.$$

Les solutions sur I sont donc les fonctions de la forme

$$f(x) = (C + P(x))\,e^{A(x)} = (C+x)e^{x^3}, \qquad x \in I,$$

où C est une constante arbitraire. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $C = 1$ et que, par conséquent, la solution cherchée est

$$f(x) = (x+1)e^{x^3}, \qquad x \in I.$$