1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Corrigé de l'examen de math B du 18 août 2017
informaticiens

Version 14 juillet 2017

QUESTIONNAIRE

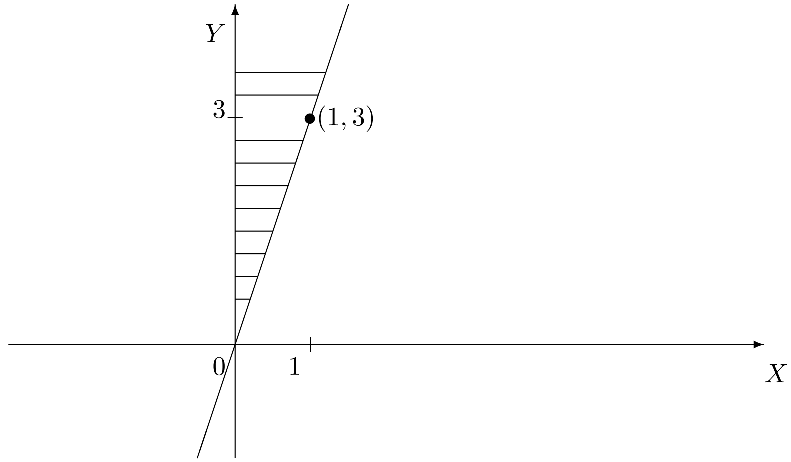
1. On donne la fonction f par
$$f(x) = \cos(x)\ \sin(x).$$
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2, 3$ en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations à l'ordre 0, 1 et 2 en utilisant différentes couleurs.

2. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.$$
a) Cette matrice est-elle inversible ? Pourquoi ?
b) Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.
c) Déterminer les valeurs propres de A.

3. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
a) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
b) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

4. On donne la fonction f par
$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{y^2 - x^2}\right) - \mathrm{arcotg}\left(\frac{y}{x}\right).$$
a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
b) En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable et la dérivée par rapport à sa seconde variable ?
c) En utilisant l'expression des dérivées obtenues précédemment, que vaut
$$xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y).$$

5. a) Déterminer, si elle existe, l'intégrale $\displaystyle\iint_A \cos(x-2y)\ dx\ dy$ sur $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{3}]$ et représenter l'ensemble d'intégration en le hachurant.
b) On donne l'ensemble fermé non borné A (hachuré). Si possible, déterminer
$$\int\int_A e^{-y}\ dx\ dy$$
en choisissant un ordre d'intégration. Permuter alors les intégrales et déterminer (en effectuant le calcul) si le résultat change ou non.



6. Calculer, si possible, l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \left(\int_x^{x^2} \frac{x}{y^4}\, dy \right) dx$$
et représenter son ensemble d'intégration en le hachurant.

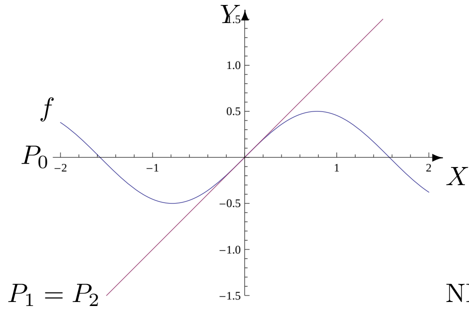
7. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme
$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-2)^m}{2^{3m+1}}, \qquad (ii)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\cos(\frac{\pi}{3}))^m}{m!}.$$

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f par**
$$f(x) = \cos(x)\ \sin(x).$$
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2, 3$ en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations à l'ordre 0, 1 et 2 en utilisant différentes couleurs.

Solution. La fonction $f : x \mapsto \cos x\ \sin x = \frac{1}{2}\sin(2x)$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$Df(x) = \cos(2x) \quad D^2f(x) = -2\sin(2x) \ \text{ et } \ D^3f(x) = -4\cos(2x).$$
Comme $f(0) = 0,\ Df(0) = 1,\ D^2f(0) = 0$ et $D^3f(0) = -4$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = x = P_2(x) \qquad P_3(x) = P_2(x) + \frac{D^3f(0)}{3!}x^3 = x - \frac{2x^3}{3},\ x \in \mathbb{R}.$$



NB : $P_0(x) = f(0) = 0$

2. **Soit la matrice**
$$A = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.$$
a) Cette matrice est-elle inversible ? Pourquoi ?
b) Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.
c) Déterminer les valeurs propres de A.

Solution. a) La matrice A est inversible si et seulement si $\det A = \cos^2(1) + \sin^2(1) = 1 \neq 0$. La matrice A est donc inversible.

b) La matrice des cofacteurs de A étant égale à
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix},$$
l'inverse de A est la matrice
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$
et on a
$$\begin{aligned} A.A^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(1) + \sin^2(1) & \sin(1)\cos(1) - \sin(1)\cos(1) \\ \sin(1)\cos(1) - \sin(1)\cos(1) & \sin^2(1) + \cos^2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
c) Les valeurs propres de A sont les solutions de
$$\det \begin{pmatrix} \cos(1) - \lambda & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) - \lambda \end{pmatrix} = (\cos(1) - \lambda)^2 + \sin^2(1) = \lambda^2 - 2\cos(1)\,\lambda + 1 = 0$$
Comme $\Delta = 4\cos^2(1) - 4 = -4\sin^2(1) = (2i\sin(1))^2$, les valeurs propres de A sont $\cos(1) + i\sin(1)$ et $\cos(1) - i\sin(1)$.

3. **Soit la matrice**
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
a) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
b) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution. a) Les valeurs propres de A sont les solutions de
$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^3 = 0.$$

Ainsi, la valeur propre de A est 1 (valeur propre triple).

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(A-I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

b) La matrice A n'est donc pas diagonalisable puisqu'elle ne possède pas 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

4. **On donne la fonction f par**

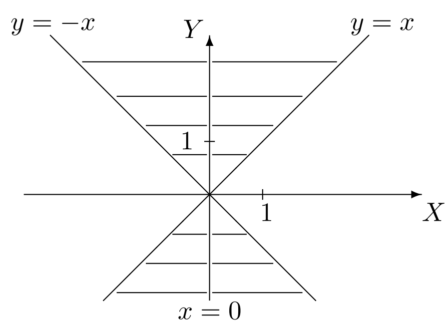
$$f(x,y)=\ln\left(\sqrt{y^2-x^2}\right)-\operatorname{arcotg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f est égal à

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0,\ y^2-x^2>0\right\}.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des droites d'équation cartésienne $x=0$, $y=x$ et $y=-x$ sont exclus de l'ensemble.



b) En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable et la dérivée par rapport à sa seconde variable ?

Solution. En un point de A, on a

$$\begin{aligned} D_x f(x,y) &= D_Z \ln(Z)|_{Z=\sqrt{y^2-x^2}}\ .\ D_T\sqrt{T}|_{T=y^2-x^2}\ .\ D_x(y^2-x^2)-D_U\operatorname{arcotg}(U)|_{U=\frac{y}{x}}\ .\ D_x\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y^2-x^2}}\ .\ (-2x)-\left(\frac{-1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\ .\ \left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-x}{y^2-x^2}-\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_y f(x,y) &= D_Z \ln(Z)|_{Z=\sqrt{y^2-x^2}}\ .\ D_T\sqrt{T}|_{T=y^2-x^2}\ .\ D_y(y^2-x^2)-D_U\operatorname{arctg}(U)|_{U=\frac{y}{x}}\ .\ D_y\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y^2-x^2}}\ .\ 2y-\left(\frac{-1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\ .\ \frac{1}{x}=\frac{y}{y^2-x^2}+\frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Remarque : comme $y^2 - x^2 > 0$, on peut écrire $\ln\left(\sqrt{y^2 - x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(y^2 - x^2)$, ce qui permet de calculer plus rapidement les dérivées partielles.

c) En utilisant l'expression des dérivées obtenues précédemment, que vaut

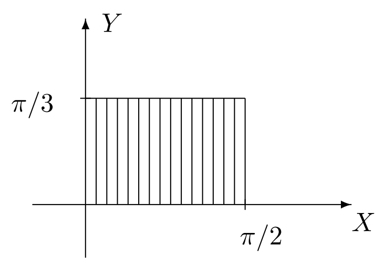
$$xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y).$$

Solution. L'expression donnée vaut donc

$$x\left(\frac{-x}{y^2 - x^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) + y\left(\frac{y}{y^2 - x^2} + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{y^2 - x^2} = 1.$$

5. **a) Déterminer, si elle existe, l'intégrale** $\iint_A \cos(x - 2y)\ dx\ dy$ **sur** $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{3}]$ **et représenter l'ensemble d'intégration en le hachurant.**

Solution. a) Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A, parallèle aux deux axes ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x, y) \mapsto \cos(x - 2y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur A, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

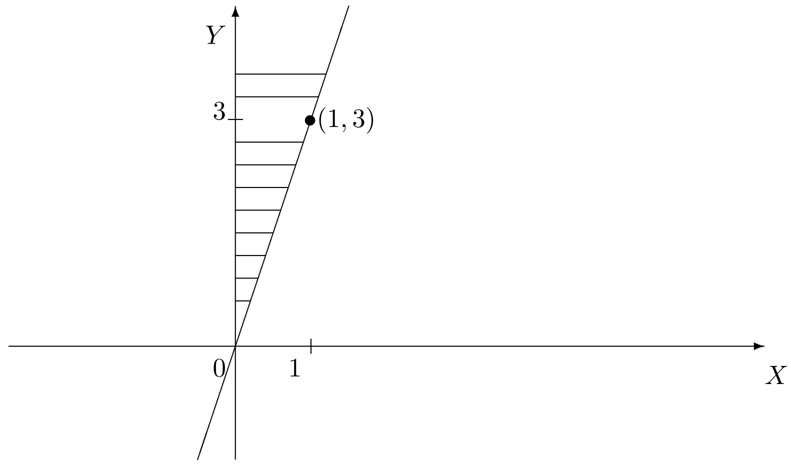
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/3}\left(\int_0^{\pi/2}\cos(x - 2y)\ dx\right)\ dy = \int_0^{\pi/3}\left[\ \sin(x - 2y)\right]_{x=0}^{x=\pi/2}\ dy \\
&= \int_0^{\pi/3}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) - \sin\left(-2y\right)\right)\ dy = \int_0^{\pi/3}(\cos(2y) + \sin(2y))\ dy \\
&= \frac{1}{2}\left[\ \sin(2y) - \cos(2y)\right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin(0) + \cos(0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{3} + 3}{4}.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction est intégrable sur A parallèle aux 2 axes, on aurait pu calculer l'intégrale en permutant l'ordre d'intégration et on aurait obtenu le même résultat.

b) On donne l'ensemble fermé non borné A **(hachuré). Si possible, déterminer**

$$\int\int_A e^{-y}\ dx\ dy$$

en choisissant un ordre d'intégration. Permuter alors les intégrales et déterminer (en effectuant le calcul) si le résultat change ou non.



Solution. b) L'ensemble d'intégration est

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [3x,+\infty[\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in \left[0,\frac{y}{3}\right]\right\}$$

et la fonction $f : (x,y) \mapsto e^{-y}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble non borné fermé.

Etudions l'intégrabilité de f sur A. Pour y fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $g : x \mapsto e^{-y}$ est continue sur le fermé borné $\left[0,\frac{y}{3}\right]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{y/3} e^{-y}\ dx = e^{-y}[x]_0^{y/3} = \frac{y}{3}e^{-y}.$$

Etudions l'intégrabilité de $h : y \mapsto \frac{y}{3}e^{-y}$ en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, on a, par une intégration par parties

$$\int_0^t \frac{y}{3}e^{-y}\ dy = \left[-\frac{y}{3}e^{-y}\right]_0^t + \frac{1}{3}\int_0^t e^{-y}\ dy = -\frac{t}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}(e^{-t}-1).$$

Dès lors, comme

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty}(te^{-t}) = 0$$

puisque, par application du théorème de l'Hospital, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste à l'infini, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

et comme cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{y/3} e^{-y}\,dx\right) dy = \frac{1}{3}.$$

La fonction étant intégrable, on peut permuter l'ordre d'intégration. Vérifions qu'on obtient bien le même résultat en calculant

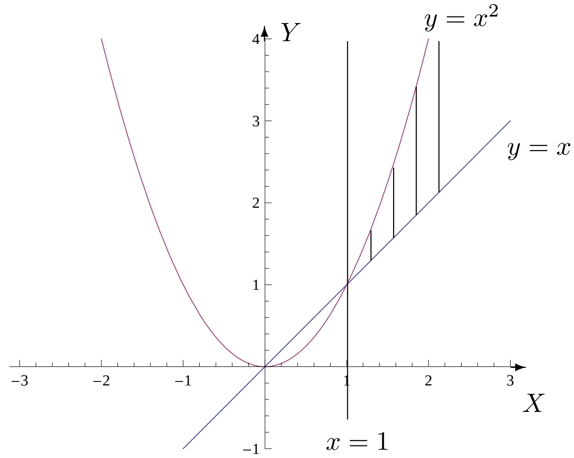
$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{3x}^{+\infty} e^{-y}\ dy\right) dx = \int_0^{+\infty}\left[-e^{-y}\right]_{3x}^{+\infty}\ dx = \int_0^{+\infty} e^{-3x}\ dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}.$$

6. **Calculer, si possible, l'intégrale**

$$\int_1^{+\infty}\left(\int_x^{x^2}\frac{x}{y^4}\,dy\right) dx$$

et représenter son ensemble d'intégration en le hachurant.

Solution. La fonction $f:(x,y)\mapsto \frac{x}{y^4}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0$ donc sur son ensemble d'intégration A, ensemble non borné dont la représentation graphique se trouve ci-dessous (partie hachurée) ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y)\in A$.
Pour x fixé dans $[1,+\infty[$, la fonction $g: y\mapsto \frac{x}{y^4}$ est continue sur le fermé borné $[x,x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_x^{x^2} \frac{x}{y^4}\,dy = x\ .\ \left[\frac{-1}{3y^3}\right]_x^{x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5}\right).$$

Etudions l'intégrabilité de $h: x\mapsto \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5}\right)$ en $+\infty$. Comme h est continu sur $[1,t]$ $\forall t>1$, on a

$$\int_1^t \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5}\right)\,dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^4}\right]_1^t = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4t^4}-\frac{1}{t}+\frac{3}{4}\right).$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4t^4}-\frac{1}{t}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

et comme cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int_1^{+\infty}\left(\int_x^{x^2}\frac{x}{y^4}\,dy\right)dx = \frac{1}{4}.$$

7. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-2)^m}{2^{3m+1}}, \qquad (ii)\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(\cos(\frac{\pi}{3}))^m}{m!}.$$

Solution. La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-2)^m}{2^{3m+1}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^m$, série géométrique convergente puisque la raison $-\frac{1}{4}\in]-1,1[$. La somme de cette série vaut

$$\frac{1}{2}\ .\ \left(\frac{-1}{4}\right)\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^m = \frac{-1}{8}\ \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{10}.$$

La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\cos(\frac{\pi}{3}))^m}{m!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. La somme de cette série vaut donc $\exp(\frac{1}{2}) - 1 = \sqrt{e} - 1$.