1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales (partim B)

Corrigé de l'interrogation de math du 20 avril 2017

Version 18 avril 2017

QUESTIONNAIRE

Théorie

1. Soit M une matrice carrée de dimension n ($n \in \mathbb{N}_0$).
   a) Définir la notion de valeur propre de M.
   b) Définir la notion de polynôme caractéristique de M.
   c) Démontrer que si λ_0 est une valeur propre de M alors λ_0 est un zéro du polynôme caractéristique de M.

2. a) Enoncer le théorème d'intégration par changement de variables pour une fonction de 2 variables.
   b) En déduire la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné. Justifier votre réponse.
   c) Sans la calculer et en utilisant le point b), déterminer la nouvelle expression de l'intégrale

$$\iint_A \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dx\, dy \qquad \text{avec} \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \le y \le -x\right\}$$

   si on travaille en coordonnées polaires.
   Représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant.

Exercices

1. Soient un réel a et la matrice $M = \begin{pmatrix} \cos(\pi - a) & \sin(\pi - a) \\ \sin(-a) & \cos(\pi + a) \end{pmatrix}$.
   a) Pour quelle(s) valeur(s) de a cette matrice admet-elle un inverse ? Justifier.
   b) Pour quelle(s) valeur(s) de a cette matrice admet-elle une valeur propre double ? Justifier.

2. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$.
   Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable. Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $D_x D_y f(x,y)$.

3. On donne une fonction f continûment dérivable sur l'ensemble $A =]-1,1[\times]0,1[$.
   a) Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(3x-2y, xy)$? Le représenter graphiquement en le hachurant.
   b) Quelle est l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

4. Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \ge 0,\ x^2 \le y^2 \le 1 + x^2\}$
   a) Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé en le hachurant.
   b) Si f est une fonction continue sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, l'intégrer d'abord
      (i) par rapport à y puis par rapport à x
      (ii) par rapport à x puis par rapport à y
   c) Avec l'hypothèse ci-dessus, est-on certain de trouver la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Justifier.

5. Si possible, calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}\, dy \right) dx,$$

   après avoir représenté l'ensemble d'intégration.

CORRIGE

Questions de théorie

1. **Soit M une matrice carrée de dimension n ($n \in \mathbb{N}_0$).**
   a) Définir la notion de valeur propre de M.
   b) Définir la notion de polynôme caractéristique de M.
   c) Démontrer que si λ_0 est une valeur propre de M alors λ_0 est un zéro du polynôme caractéristique de M.

   Solution. Voir cours (syllabus)

2. **a) Enoncer le théorème d'intégration par changement de variables pour une fonction de 2 variables.**

   Solution. Voir cours (syllabus)

   b) En déduire la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné. Justifier votre réponse.

   Solution. Voir cours (syllabus)

   c) Sans la calculer et en utilisant le point b), déterminer la nouvelle expression de l'intégrale

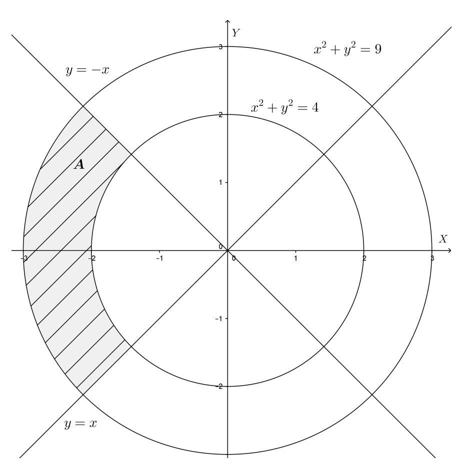
$$\iint_A \frac{x+y}{x^2+y^2}\ dx\ dy \qquad \textbf{avec} \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \le y \le -x\right\}$$

   si on travaille en coordonnées polaires.
   Représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant.

   Solution. On a

$$\iint_A \frac{x+y}{x^2+y^2}\ dx\, dy = \int_2^3 \left(\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \frac{r(\cos(\theta)+\sin(\theta))}{r^2}\ r\ d\theta\right) dr = \int_2^3 \left(\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} (\cos(\theta)+\sin(\theta))\ d\theta\right) dr$$

   et l'ensemble A est la partie du plan hachurée ci-dessous, les points des bords étant inclus dans l'ensemble.



Exercices

1. **Soient un réel a et la matrice $M = \begin{pmatrix} \cos(\pi - a) & \sin(\pi - a) \\ \sin(-a) & \cos(\pi + a) \end{pmatrix}$.**

   a) Pour quelle(s) valeur(s) de a cette matrice admet-elle un inverse ? Justifier.
   b) Pour quelle(s) valeur(s) de a cette matrice admet-elle une valeur propre double ? Justifier.

   Solution. a) Comme $M = \begin{pmatrix} -\cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & -\cos(a) \end{pmatrix}$, $\det(M) = \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 \neq 0$ et la matrice M admet un inverse pour tout réel a puisque son déterminant n'est pas nul.

   b) Comme $M = \begin{pmatrix} -\cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & -\cos(a) \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est

   $$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\cos(a) - \lambda & \sin(a) \\ -\sin(a) & -\cos(a) - \lambda \end{pmatrix} = (-\cos(a) - \lambda)^2 + \sin^2(a) = \lambda^2 + 2\cos(a)\lambda + 1.$$

   Dès lors, $\Delta = 4\cos^2(a) - 4 = -4(1 - \cos^2(a)) = -4\,\sin^2(a)$ et M admet une valeur propre double si et seulement si $\Delta = 0 \Leftrightarrow \sin(a) = 0 \Leftrightarrow a = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

2. **On donne explicitement la fonction f par $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$.**
   Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable. Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $D_x D_y f(x, y)$.

   Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

   Dans A, on a

   $$D_y f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

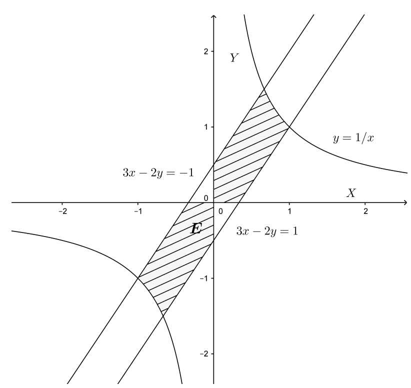
   et

   $$D_x D_y f(x, y) = D_x \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

3. **On donne une fonction f continûment dérivable sur l'ensemble $A =]-1, 1[\times]0, 1[$.**
   a) Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x, y) = f(3x - 2y, xy)$? Le représenter graphiquement en le hachurant.
   b) Quelle est l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

   Solution.

   a) Les fonctions $f_1 : (x, y) \mapsto 3x - 2y$ et $f_2 : (x, y) \mapsto xy$ sont dérivables dans $\mathbb{R}^2$. Dès lors, le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < 3x - 2y < 1,\ 0 < xy < 1\}$; c'est la partie du plan hachurée ci-contre, les points des bords étant exclus.



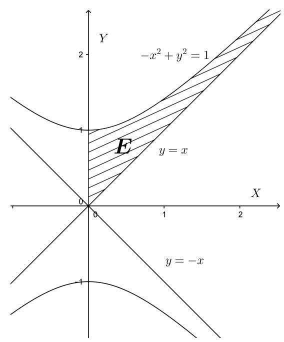
   b) Comme F est dérivable sur E, par application du théorème de dérivation des fonctions composées, les dérivées partielles de F en fonction de celles de f sont données par

   $$(D_x F)(x, y) = (D_1 f)_{(3x-2y, xy)} \cdot 3 + (D_2 f)_{(3x-2y, xy)} \cdot y$$

et
$$(D_yF)(x,y) = (D_1f)_{(3x-2y,xy)}\ .\ (-2) + (D_2f)_{(3x-2y,xy)}\ .\ x$$
si D_1f et D_2f sont respectivement les dérivées par rapport à la première et la deuxième variable de f.

4. **Soit** $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x^2 \leq y^2 \leq 1 + x^2\}$
a) Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé en le hachurant.
b) Si f **est une fonction continue sur** $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$**, l'intégrer d'abord**
(i) par rapport à y **puis par rapport à** x
(ii) par rapport à x **puis par rapport à** y
c) Avec l'hypothèse ci-dessus, est-on certain de trouver la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Justifier.

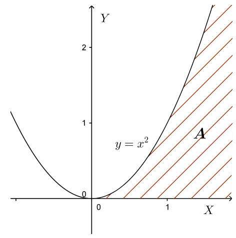
Solution. a) La représentation graphique de E est la suivante, les points des bords étant compris dans l'ensemble.



b) L'ensemble E peut s'écrire sous la forme
$$\begin{aligned} E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,+\infty[,\ y \in [x, \sqrt{1+x^2}]\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1]\ ,\ x \in [0,y]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,+\infty[\ ,\ x \in [\sqrt{y^2-1}, y]\}. \end{aligned}$$
(i) En intégrant successivement par rapport à y puis par rapport à x, on a
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\ dy \right) dx.$$
(ii) En intégrant successivement par rapport à x puis par rapport à y, on a
$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^y f(x,y)\ dx \right) dy + \int_1^{+\infty} \left(\int_{\sqrt{y^2-1}}^y f(x,y)\ dx \right) dy.$$
c) Comme f est seulement continu sur E, on n'est pas certain de trouver la même valeur ; on aurait cette certitude si la fonction f était intégrable sur E.

5. **Si possible, calculer l'intégrale suivante**
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}\, dy \right) dx,$$
après avoir représenté l'ensemble d'intégration.

Solution. L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,+\infty[\text{ et } y \in [0,x^2]\right\}$.



Pour x fixé dans $]0, +\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}$ est continue sur $\{y \in \mathbb{R} : y < 5x^2\}$ donc sur le fermé borné $[0, x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}\, dy = -e^{-x} \int_0^{x^2} \frac{-1}{\sqrt{5x^2 - y}}\, dy = -2e^{-x} \left[\sqrt{5x^2 - y}\right]_0^{x^2}$$
$$= -2e^{-x}\left(\sqrt{4x^2} - \sqrt{5x^2}\right) = 2\,(\sqrt{5} - 2)\, x\, e^{-x}$$

puisque $x > 0$.
La fonction $g : x \mapsto 2\,(\sqrt{5} - 2)\, x\, e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, +\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$ en utilisant la définition. Pour cela, puisque $|g| = g$ sur $[0, +\infty[$ calculons

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t 2\,(\sqrt{5} - 2)\, x\, e^{-x}\, dx = 2\,(\sqrt{5} - 2) \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x\, e^{-x}\, dx.$$

Par une intégration par parties, on a

$$F(t) = \int_0^t x\, e^{-x}\, dx = \Big[-x\, e^{-x} \Big]_0^t + \int_0^t e^{-x}\, dx = \Big[-x\, e^{-x} - e^{-x} \Big]_0^t = (-t - 1)\, e^{-t} + 1$$

puisque $e^0 = 1$.
Dès lors,

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to +\infty} (-t - 1)\, e^{-t} + 1 = 1$$

puisque, à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste.
Enfin, comme la limite $\lim\limits_{t \to +\infty} \displaystyle\int_0^t 2\,(\sqrt{5} - 2) x\, e^{-x}\, dx = 2\,(\sqrt{5} - 2)$ est finie, la fonction f est intégrable sur A et l'intégrale I vaut $2\,(\sqrt{5} - 2)$.