1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales (partim B)

Corrigé de l'interrogation de math du 24 avril 2017

Version 18 avril 2017

QUESTIONNAIRE

Théorie

1. Soit M une matrice carrée de dimension n ($n \in \mathbb{N}_0$).
   a) Définir la notion de valeur propre de M.
   b) Définir la notion de polynôme caractéristique de M.
   c) Démontrer que si λ_0 est une valeur propre de M alors λ_0 est un zéro du polynôme caractéristique de M.

2. On donne les intervalles ouverts I_1, I_2 et I de $\mathbb{R}$ et des fonctions $f \in C_1(I_1 \times I_2)$, $f_1 \in C_1(I)$, $f_2 \in C_1(I)$, les fonctions f_1 et f_2 étant à valeurs réelles.
   a) Où la fonction $g = f(f_1, f_2)$ est-elle continûment dérivable ?
   b) Quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f et des dérivées de f_1 et f_2 ?

Exercices

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & (1-i)^2 \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Cette matrice admet-elle un inverse ? Justifier.
   b) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Justifier.
   c) Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
2. On donne explicitement la fonction f par $f(x, y) = \arcsin(xy^2)$.
   Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable et le représenter dans un repère orthonormé. Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $D_y D_x f(x, y)$.

3. On donne une fonction continûment dérivable sur l'ensemble $E =]2\sqrt{2}, +\infty[\times]-\infty, 2[$ et on la désigne par f.
   a) Représenter E dans un repère orthonormé.
   b) En vous servant de la réponse à la deuxième question de théorie, déterminer dans quel intervalle (de réels) la fonction g est dérivable puis en donner, si c'est possible, l'expression explicite de sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f au point $t = -2$ en simplifiant au maximum si on a

$$g \;:\; t \mapsto f\left(\sqrt{4t^2 - 1}, \ln(t^2)\right)$$

4. Soit f une fonction intégrable sur la partie fermée A du plan telle que

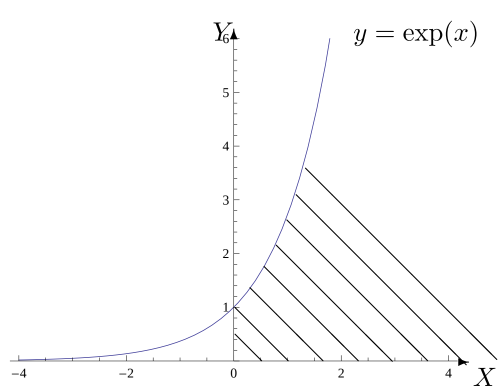
$$\iint_A f(x, y)\; dxdy \;=\; \int_{-\infty}^{1} \left(\int_{x+2}^{+\infty} f(x, y)\; dy \right)\; dx.$$

   a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant.
   b) Permuter l'ordre d'intégration.

5. Si possible, calculer l'intégrale suivante

$$\iint_A \frac{xe^{-x^2}}{e^x + y}\, dx\, dy,$$

   où A est l'ensemble hachuré ci-contre.



CORRIGE

Questions de théorie

1. **Soit M une matrice carrée de dimension n ($n \in \mathbb{N}_0$).**
 a) Définir la notion de valeur propre de M.
 b) Définir la notion de polynôme caractéristique de M.
 c) Démontrer que si λ_0 est une valeur propre de M alors λ_0 est un zéro du polynôme caractéristique de M.

 Solution. Voir cours (syllabus)

2. **On donne les intervalles ouverts I_1, I_2 et I de $\mathbb{R}$ et des fonctions $f \in C_1(I_1 \times I_2)$, $f_1 \in C_1(I)$, $f_2 \in C_1(I)$, les fonctions f_1 et f_2 étant à valeurs réelles.**
 a) Où la fonction $g = f(f_1, f_2)$ est-elle continûment dérivable ?
 b) Quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f et des dérivées de f_1 et f_2 ?

 Solution. Voir cours (syllabus)

Exercices

1. **Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & (1-i)^2 \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$.**

 a) Cette matrice admet-elle un inverse ? Justifier.
 b) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Justifier.
 c) Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

 Solution. a) Comme $A = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 4i^2 = -4 \neq 0$ et la matrice A admet un inverse puisque son déterminant n'est pas nul.

 b) Comme $A = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2i \\ 2i & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda) + 4i^2 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4).$$

 Les valeurs propres sont donc -1 et 4. Puisqu'elles sont simples, la matrice est diagonalisable.

 c) Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(A+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2iy = 0 \\ 2ix + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2iy.$$

 Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs $c_1 \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{C}_0$.

 Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 4 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(A-4I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2i \\ 2i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2iy = 0 \\ 2ix - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2ix.$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 4 sont les vecteurs $c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{C}_0$.

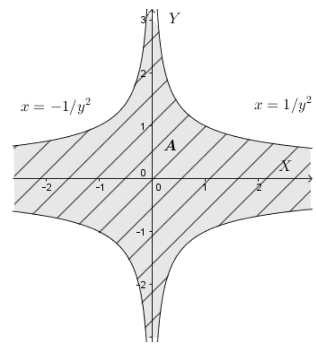
Ainsi, par exemple, la matrice inversible

$$S = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \quad \text{est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \arcsin(xy^2)$.**
Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable et le représenter dans un repère orthonormé. Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $D_yD_xf(x,y)$.

Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < xy^2 < 1\}$.

La représentation graphique de l'ensemble A est la partie hachurée du plan, les points des bords n'étant pas compris dans l'ensemble.



Dans A, on a

$$D_yD_xf(x,y) = D_y\left(\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}}\right) = \frac{2y(1-x^2y^4)^{\frac{1}{2}} - y^2\frac{1}{2}(1-x^2y^4)^{-\frac{1}{2}}(-4x^2y^3)}{1-x^2y^4}$$

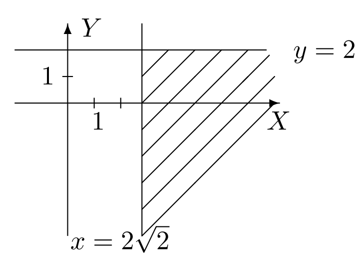
$$= \frac{2y - 2x^2y^5 + 2x^2y^5}{\sqrt{(1-x^2y^4)^3}} = \frac{2y}{\sqrt{(1-x^2y^4)^3}}.$$

3. **On donne une fonction continûment dérivable sur l'ensemble $E =]2\sqrt{2}, +\infty[\times]-\infty, 2[$ et on la désigne par f.**
a) Représenter E dans un repère orthonormé.
b) En vous servant de la réponse à la deuxième question de théorie, déterminer dans quel intervalle (de réels) la fonction g est dérivable puis en donner, si c'est possible, l'expression explicite de sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f au point $t = -2$ en simplifiant au maximum si on a

$$g \;:\; t \mapsto f\left(\sqrt{4t^2-1}, \ln(t^2)\right)$$

Solution.

a) L'ensemble E est la partie du plan hachurée ci-contre, les points des bords étant exclus de E.



b) Les fonctions $f_1 : t \mapsto \sqrt{4t^2-1} =$ et $f_2 : t \mapsto \ln(t^2)$ sont respectivement dérivables dans $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $\mathbb{R}_0$. La fonction g, composée de f ($f \in C_1(E)$) et de f_1 et f_2, est donc dérivable dans

$$I = \left\{t \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\;:\; (f_1(t), f_2(t)) \in E\right\}$$

$$= \left\{t \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\;:\; \sqrt{4t^2-1} > 2\sqrt{2},\ \ln(t^2) < 2\right\}$$

$$= \left\{ t \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[: 4t^2 - 9 > 0,\ t^2 - e^2 < 0 \right\}$$
$$= \left\{ t \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[: \left(t < -\frac{3}{2} \text{ ou } t > \frac{3}{2}\right),\ -e < t < e \right\}$$
$$= \left\{ t \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[: |t| > \frac{3}{2},\ |t| < e \right\}$$
$$= \left]-e, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, e\right[.$$

c) Comme g est dérivable sur I par application du théorème de dérivation des fonctions composées, la dérivée de g en fonction des dérivées partielles de f est donnée explicitement par

$$(Dg)(t) = (D_1 f)_{\left(\sqrt{4t^2-1}, \ln(t^2)\right)} \cdot D\sqrt{4t^2-1} + (D_2 f)_{\left(\sqrt{4t^2-1}, \ln(t^2)\right)} \cdot D\ln(t^2)$$
$$= \Big(D_1 f\Big)_{\left(\sqrt{4t^2-1}, \ln(t^2)\right)} \cdot \left(\frac{4t}{\sqrt{4t^2-1}}\right) + \Big(D_2 f\Big)_{\left(\sqrt{4t^2-1}, \ln(t^2)\right)} \cdot \left(\frac{2}{t}\right),\ t \in I$$

si $D_1 f$ et $D_2 f$ sont respectivement les dérivées par rapport à la première et la deuxième variable de f.

Comme $\sqrt{4(-2)^2 - 1} = \sqrt{15}$, $\ln((-2)^2) = \ln(4)$ et $-2 \in I$, il s'ensuit que la valeur de cette dérivée en -2 est égale à

$$(Dg)(-2) = \left(\frac{-8}{\sqrt{15}}\right) \Big(D_1 f\Big)_{(\sqrt{15}, \ln(4))} - \Big(D_2 f\Big)_{(\sqrt{15}, \ln(4))}$$

si $D_1 f$ et $D_2 f$ sont respectivement les dérivées par rapport à la première et la deuxième variable de f.

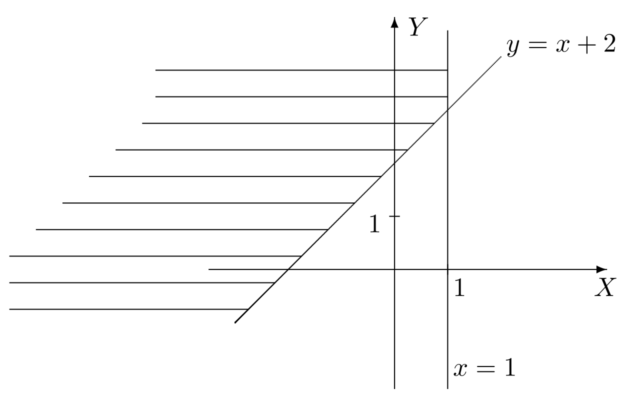
4. **Soit f une fonction intégrable sur la partie fermée A du plan telle que**

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy \ = \ \int_{-\infty}^{1} \left(\int_{x+2}^{+\infty} f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant.

Solution. On a
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in]-\infty, 1],\ y \in [x+2, +\infty[\right\}.$$

Sa représentation graphique est la suivante, les points des bords étant compris dans l'ensemble.



b) Permuter l'ordre d'intégration.

Solution. L'ensemble A peut aussi s'écrire sous la forme

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in]-\infty, 3],\ x \in]-\infty, y-2] \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [3, +\infty[\ ,\ x \in]-\infty, 1] \right\}.$$

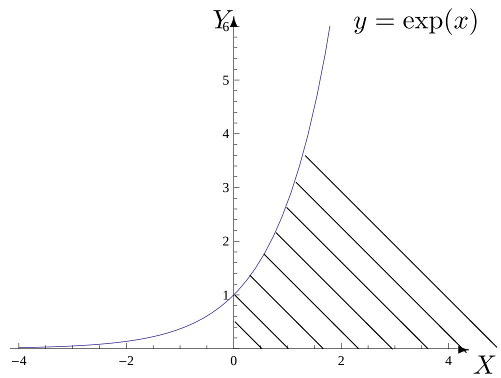
Puisque la fonction f est intégrable sur A, en permutant les intégrales on obtient

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy = \int_{-\infty}^{3} \left(\int_{-\infty}^{y-2} f(x,y)\ dx \right) dy + \int_{3}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{1} f(x,y)\ dx \right) dy.$$

5. **Si possible, calculer l'intégrale suivante**

$$\iint_A \frac{xe^{-x^2}}{e^x+y}\, dx\, dy,$$

où A est l'ensemble hachuré ci-contre.



Solution. L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[\text{ et } y \in [0, e^x]\right\}$.

Etudions l'intégrabilité de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xe^{-x^2}}{e^x+y}$ sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y),\ \forall (x,y) \in A$ et que f est continu sur $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^x + y \neq 0\right\}$ donc sur A.

Pour x fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \dfrac{xe^{-x^2}}{e^x+y}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-e^x\}$ donc sur le fermé borné $[0, e^x]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{e^x} \frac{xe^{-x^2}}{e^x+y}\ dy = xe^{-x^2} \int_0^{e^x} \frac{1}{e^x+y}\ dy = xe^{-x^2} \left[\ln\left(e^x+y\right) \right]_0^{e^x}$$

$$= xe^{-x^2} \left(\ln(2e^x) - \ln(e^x)\right) = xe^{-x^2}\ \ln\left(\frac{2e^x}{e^x}\right) = \ln(2)\ xe^{-x^2}.$$

La fonction $g : x \mapsto \ln(2)\, xe^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$ en utilisant la définition. Pour cela, puisque $|g| = g$ sur $[0,+\infty[$ calculons

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \ln(2)\, xe^{-x^2}\ dx = \ln(2) \lim_{t\to+\infty} \int_0^t x\, e^{-x^2}\ dx.$$

On a

$$F(t) = \int_0^t x\, e^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2} \int_0^t (-2)\, x\, e^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^t = -\frac{1}{2}(e^{-t^2} - 1)$$

puisque $e^0 = 1$.
Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{2}(e^{-t^2} - 1) = \frac{1}{2}$$

puisque, vu le théorème de la limite d'une fonction composée,

$$\lim_{t\to+\infty} (-t^2) = -\infty \quad \text{ et } \quad \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

Enfin, comme la limite $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \ln(2)\, xe^{-x^2}\ dx = \frac{1}{2}\ln(2)$ est finie, la fonction f est intégrable sur A et l'intégrale donnée vaut $\dfrac{1}{2}\ln(2)$.