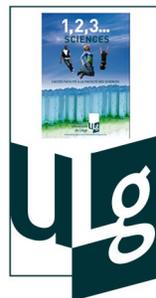


---

Université  
de Liège



# *1, 2, 3... Sciences*

*Année académique 2016-2017*

---

*Mathématique : partim B*

LISTES TYPE

RÉPÉTITIONS CHIMIE, GÉOGRAPHIE, GÉOLOGIE, INFORMATIQUE,  
PHYSIQUE

---

# LISTE 1 : CALCUL MATRICIEL (1)

---

## A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Qu'appelle-t-on une matrice ?
2. Qu'appelle-t-on le type (ou le format) et la dimension d'une matrice ?
3. Etant donné une matrice  $A$ , définir
  - (a) sa matrice conjuguée,
  - (b) sa matrice transposée,
  - (c) sa matrice adjointe.
4. Définir les opérations suivantes et en donner les propriétés :
  - (a) addition de deux matrices du même type,
  - (b) multiplication d'une matrice par un nombre complexe,
  - (c) multiplication de deux matrices.
5. Qu'appelle-t-on le déterminant d'une matrice ? Peut-on toujours le définir ?
6. Citer les propriétés liées aux déterminants.
7. Qu'appelle-t-on matrice inverse d'une matrice carrée donnée ?
8. Quelle est la forme de cette matrice ?
9. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice inverse d'une matrice carrée donnée existe.

### Préambule

Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent les matrices. Après modélisation, l'outil « matrices » permet d'effectuer de manière efficace, claire et très gérable, des calculs et estimations qui semblent à priori parfois complexes.

*In applied mathematics, the Leslie matrix is a discrete, age-structured model of population growth that is very popular in population ecology. It was invented by and named after P. H. Leslie. The Leslie Matrix (also called the Leslie Model) is one of the best known ways to describe the growth of populations (and their projected age distribution), [...].*<sup>1</sup> En utilisant les matrices, les éléments qui y sont liés (déterminant, valeurs propres, vecteurs propres, ...), on récolte beaucoup d'informations quant à l'évolution de la population modélisée, comme des taux de croissance à long terme, l'estimation de tel ou tel type d'individus après un certain temps, etc

---

REMARQUE pour cette liste

- Plusieurs exercices ont déjà été faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.

---

1. Le texte qui suit est tiré de Wikipedia.

**A résoudre PENDANT la répétition  
(et à achever à domicile si nécessaire)**

Lors de la répétition, les exercices I. 1(2-7), II. 1(A - C) et III. (D) seront résolus par l'assistant.

**I. Opérations entre matrices**

1. Soient les matrices  $A, B, C$  données par

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ 1-i & 1 \\ \frac{2}{i} & (2+i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i-1} \\ 2i & \frac{i}{3} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

1)  $A + B$ , 2)  $A + \tilde{B}$ , 3)  $A.B$ , 4)  $A.B + C$ , 5)  $B.A$ , 6)  $C.\tilde{A}$ , 7)  $A^*.C$ , 8)  $i.C$ , 9)  $(i.A)^*$ .

2. Soit  $A$  une matrice carrée de dimension 3 telle que  $A_{ij} = 2, \forall i, j$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer

$C = AB - BA$  et en déduire la forme de  $\tilde{C} + C$ .

3. On donne la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A^2 - 5A + 6I = 0$ .

4. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

**II. Déterminants**

1. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+i & -2i \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3i \\ (i-1)^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \cos(2a) & \sin^2(a) & \cos^2(a) \\ \cos(2b) & \sin^2(b) & \cos^2(b) \\ \cos(2c) & \sin^2(c) & \cos^2(c) \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

2. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en  $x \in \mathbb{C}$ . Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$A = \begin{pmatrix} i & x-2 \\ x & 5i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 9 \\ -1 & x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 6 \\ 0 & x-1 & x \\ 1 & 0 & x+2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

### III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## LISTE 2 : CALCUL MATRICIEL (2)

---

### A préparer AVANT de venir à la répétition

- Etant donné une matrice carrée  $A$ ,
  - qu'appelle-t-on valeur propre de  $A$  ?
  - qu'appelle-t-on vecteur propre de  $A$  ?
- En pratique, comment détermine-t-on les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée.
- Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?
- Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
- Qu'appelle-t-on matrice stochastique ?
- Qu'appelle-t-on vecteur de probabilité ?

### A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(C) et II. 1 seront résolus par l'assistant.

#### I. Diagonalisation

- Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.

$$A = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale  $\Delta$ , ainsi qu'une matrice inversible  $S$  qui y conduit.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits  $AS$  et  $S\Delta$ . Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce résultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

- Une matrice carrée  $A$  de dimension 2 possède les deux valeurs propres 2 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Que vaut  $A$  ?

## II. Divers

1. L'institut météorologique a fait les observations suivantes :
  - on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
  - s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
  - s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

Sachant cela,

- (a) Représenter la matrice de transition de ce système.
  - (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?
  - (c) A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?
2. Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas. L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 75 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 20. S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 1 fois sur 2 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable. Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
    - (a) Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?
    - (b) A longue échéance, que mange ce lapin ?

3. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} Dx(t) &= -3x(t) - 4y(t) + 9t \\ Dy(t) &= -5x(t) - 2y(t) + 9e^t \end{cases} .$$

Déterminer les composantes  $(x(t), y(t))$  du vecteur position de cette particule à tout instant  $t$ .

4. En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle  $\theta$ ) est représentée par une matrice du type

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où  $\theta$  est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).

- Pour tout  $\theta$ , déterminer la matrice produit  $M_\theta^2$  et en simplifier les éléments au maximum.
- Montrer que quels que soient  $\theta, \theta'$ , les matrices  $M_\theta$  et  $M_{\theta'}$  commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?
- Montrer que quel que soit le réel  $\theta$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

est aussi une matrice qui représente une rotation.

5. Considérons la fonction  $f : (x, y) \mapsto -x^2 + y^2 + 2xy - 3x + y - 4$ .

a) Résoudre le système  $\begin{cases} D_x f(x, y) = 0 \\ D_y f(x, y) = 0 \end{cases}$

b) Calculer les dérivées secondes de  $f$ .

c) Notons  $H_f(x, y)$  la matrice  $\begin{pmatrix} D_x^2 f & D_x D_y f \\ D_y D_x f & D_y^2 f \end{pmatrix}$ .

Calculer  $\det H_f(x, y)$  si  $(x, y)$  est la (les) solution(s) du système ci-dessus.

d) Mêmes questions avec la fonction  $g : (x, y) \mapsto \frac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 4y$ .

6. Vrai ou faux (Justifier)

(a) Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(b) La matrice  $\begin{pmatrix} a + b & a^2 + ab + b^2 \\ a^2 - b^2 & a^3 - b^3 \end{pmatrix}$  ( $a, b \in \mathbb{C}$ ) est inversible.

(c) Si une matrice carrée  $A$  de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de  $A$  est multiple de l'autre.

(d) Si deux colonnes d'une matrice carrée  $A$  de dimension 3 sont identiques, alors  $\det A = 0$ .

(e) Si  $A$  est une matrice carrée de dimension 3, alors  $\det(4A) = 4 \det A$ .

(f) Si  $B$  est la matrice obtenue en multipliant la colonne 2 de  $A$  par 4, alors  $\det B = 4 \det A$ .

# LISTE 3 : COMPLÉMENTS

## A propos de cette liste

Cette liste d'exercices reprend des énoncés du type de ceux résolus au premier quadrimestre. Ces rappels relatifs aux représentations d'ensembles, à la dérivation et au calcul intégral seront utiles pour les exercices portant sur les fonctions de plusieurs variables.

**A résoudre PENDANT la répétition  
(et à achever à domicile si nécessaire)**

## I. Représentation d'ensembles

1. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante

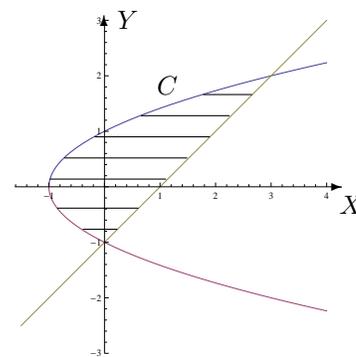
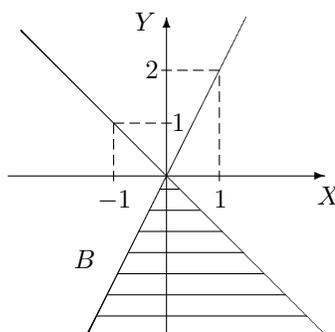
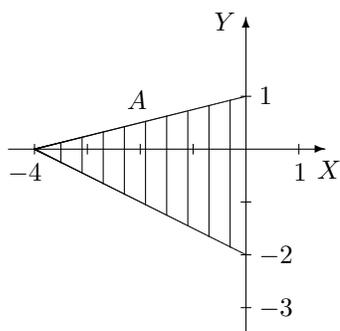
a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{36 - 9x^2}\}\}$

b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq x^2 - 1\}$

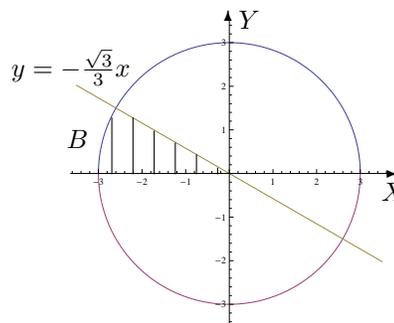
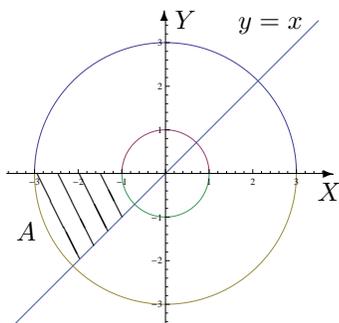
c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y, y \in [1, 2]\}$

2. Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord

- a) l'ensemble de variation des abscisses  
b) l'ensemble de variation des ordonnées.



3. En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans  $A$  mais non dans  $B$ .



4. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y > 0, x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.

## II. Dérivation

1. En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en  $x_0$  et donner la valeur de sa dérivée en ce point si
  - a)  $f : x \mapsto |x^2 - 9|$  et  $x_0 = 2$
  - b)  $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$  et  $x_0 = 3$
2. a) On donne la fonction  $f$  dérivable sur  $] -2, 2[$ . Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction  $F$  définie par  $F(x) = f(\sqrt{x^2 - 1})$  ainsi que l'expression de sa dérivée en fonction de celle de  $f$  ?  
b) Même question pour  $g$  dérivable sur  $] -\frac{\pi}{2}, 0[$  avec  $G(x) = g(\arcsin(3x - 1))$ .

## III. Calcul intégral

1. a) Si  $a$  est un paramètre réel fixé dans  $]0, 1[$ , la fonction  $f_1 : x \mapsto a^2 \cos(ax)$  est-elle intégrable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  ? Si oui, que vaut son intégrale ?  
b) Si  $a > 0$  est un réel fixé, la fonction  $f_2 : x \mapsto \frac{a e^{a^2}}{a^2 + x}$  est-elle intégrable sur  $[0, a^2]$  ? Si oui, que vaut son intégrale ?  
c) Si  $a > 0$  est un réel fixé, la fonction  $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2 - a^2}$  est-elle intégrable sur  $[a, +\infty[$  ? Si oui, que vaut son intégrale ?
2. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$a) \int_0^e \ln(x) dx$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

3. On considère l'ensemble  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{3x}{2} \leq y \leq \frac{3x}{2}, y \geq x^2 - 1 \right\}$ . Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.

## IV. Divers

1. Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut

$$K_C = 50 = \frac{1,56^2}{(A - 0,78) \cdot 0,22}$$

Que vaut  $A$  sachant que  $A$  représente la quantité de matière introduite dans le milieu réactionnel ?

2. Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut

$$K_C = 4 = \frac{x}{(0,5 - x)(0,25 - x)}$$

Que vaut  $x$  sachant que  $x \in ]0; 0,25[$  représente le nombre de moles par litre de produit formé ?

3. En creusant pour les fondations d'une maison, on pénètre dans une masse de débris de roche emballés dans une matrice argileuse. Dans la masse, on trouve les restes d'un arbuste qu'on échantillonne pour le dater au carbone-14. On obtient un carbone-14 résiduel correspondant à 17 % de la quantité initiale.

Sachant que la constante de désintégration radioactive  $\lambda$  du carbone-14 vaut  $1,21 \cdot 10^{-4}$  (en année<sup>-1</sup>) et que  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$  où  $N(t)$  est le nombre d'atomes restants au temps  $t$  (en années) et  $N_0$  le nombre d'atomes au départ, déterminer

- a) la demi-vie (temps nécessaire pour que le nombre d'atomes radioactifs soit diminué de moitié) du carbone-14
- b) l'âge de cet arbuste.

4. Le mouvement d'un point matériel sur un pendule rotatif est décrit par la fonction potentielle

$$\nu(\theta) = -\frac{n^2}{2} \sin^2(\theta) - \cos(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

où  $n$  est un paramètre réel strictement positif. Les positions d'équilibre du système correspondent aux extrema de  $\nu$  (équilibre stable pour un minimum, instable pour un maximum).

Déterminer les positions (éventuelles) d'équilibre du système.

5. (Pour les physiciens)<sup>2</sup> Par une intégration par parties

a) donner une formule de récurrence pour  $I_n = \int_0^1 (\ln(x))^n dx$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

b) En déduire la valeur de  $I_n$ .

---

2. Et ceux qui veulent relever le défi

# LISTE 4 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES (1)

---

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Définitions et représentations graphiques

Qu'appelle-t-on

1. domaine de définition d'une fonction de 2 variables ?
2. courbe de niveau d'une fonction de 2 variables ?
3. surface de niveau d'une fonction de 3 variables ?
4. trace d'une surface de niveau dans un plan orthogonal à l'un des axes ?
5. surface quadrique ? Quelles sont les différentes quadriques ?

### II. Dérivation et gradient

1. Quand dit-on qu'une fonction de 2 variables est dérivable par rapport à sa première (resp. deuxième) variable en un point de coordonnées  $(x_0, y_0)$  d'un ouvert où elle est définie ?
2. Qu'appelle-t-on dérivée partielle d'une fonction de deux variables ?
3. Définir le gradient d'une fonction de plusieurs variables.

---

---

### Préambule

Les fonctions de plusieurs variables apparaissent tout naturellement dans de nombreux domaines. Ainsi, par exemple, la distance d'un point de l'espace (muni d'un repère orthonormé) à l'origine s'exprime par

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

si  $x, y, z$  sont les coordonnées du point, la loi des gaz parfaits

$$pV = nRT$$

(où  $p$  est la pression du gaz (en pascal),  $V$  est le volume occupé par le gaz (en mètre cube),  $n$  est la quantité de matière (en mole),  $R$  est la constante universelle des gaz parfaits et  $T$  est la température absolue (en kelvin)) permet d'exprimer la pression (par exemple) en fonction des autres paramètres, ...

Les exemples sont nombreux et la bonne manipulation (expression d'une variable ou d'un paramètre en fonction des autres, dérivation, intégration, ...) de ces fonctions est indispensable pour bien utiliser les modèles de divers phénomènes (physiques, chimiques, biologiques, ...)

---

## A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(g) - 2(b) - 4(a), II. 2(h) - 5(c) et 9(a) seront résolus par l'assistant.

### I. Définitions et représentations graphiques

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x, y) = \ln(4y^2 - x^2 + 1), \quad g(x, y) = \sqrt{4 - |x - 2y|}, \quad h(x, y) = \arccos\left(\frac{xy}{2}\right).$$

S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de  $(1, -2)$  par  $f$ , de  $(5, 3)$  par  $g$  et de  $(-1, 1)$  par  $h$ . Dans un repère orthonormé de l'espace représenter ces points et leur image éventuelle.

2. Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation  $f(x, y) = c$  si

- a)  $f(x, y) = 3x - y$  et  $c = -2, 3$
- b)  $f(x, y) = y^2 - x^2$  et  $c = -4, 0, 4$
- c)  $f(x, y) = x^2 - 2y$  et  $c = -2, 4$

3. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé; on appelle  $X, Y, Z$  les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne  $x^2 + 4y^2 = 9z$  dans le plan d'équation  $x = 0$  puis dans celui d'équation  $y = 0$ . Comment appelle-t-on chacune de ces courbes? Quelle est la nature de cette quadrique?

4. Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont

$$a) \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \qquad b) x^2 - y^2 = 4.$$

### II. Dérivation et gradient

1. En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction  $f$  donnée explicitement par  $f(x, y) = 2x^3 + xy^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est dérivable par rapport à sa première variable au point  $(-1, 2)$  et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

2. On donne les fonctions  $f, g$  et  $h$  par

$$f(x, y) = \ln(x^2 - 1 - y), \quad g(x, y) = \sin(x^3 y^2 + 3y) \quad \text{et} \quad h(x, y) = y^2 e^{-\frac{y}{x}}.$$

- a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
- b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.

3. On donne la fonction  $f$  par  $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 - 4y^2})$ .

- a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
- b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer  $D_x^2 f + D_y^2 f$ .

4. a) Déterminer le gradient de la fonction  $f$  donnée par  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^3 \sin(x_1 x_3)$ .  
b) Même question pour la fonction  $g$  donnée par  $g(x, y, z) = y^2 e^{x^2 y \sqrt{2z}}$ .

5. On donne les fonctions  $f$  et  $g$  respectivement par

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right) \quad g(x, y) = \exp(\sqrt{x^2 - y + 1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition  $A$  et d'infinie dérivabilité  $B$  de ces fonctions. Représenter ces domaines.

b) Déterminer l'expression explicite de  $\frac{|x|}{|y|}D_x f(x, y) + D_y f(x, y)$ .

c) Déterminer l'expression explicite de  $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$ , le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

d) Déterminer l'expression explicite de  $G(t) = g(\sin(t), \cos^2(t))$ , le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

6. On donne la fonction  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

a) Déterminer son domaine de définition  $A$  et celui d'infinie dérivabilité  $B$ .

b) Si on définit  $F$  par  $F(x, y) = f(x, y)(D_x^2 f(x, y) + D_y^2 f(x, y))$ ,  $(x, y) \in B$ , montrer que  $F$  est une fonction constante et déterminer cette constante.

7. On considère la fonction  $f_r(x, y) = y^r e^{-\frac{x}{y}}$ ,  $r$  étant un réel.

a) Déterminer son domaine de définition  $A$  et celui d'infinie dérivabilité  $B$ .

b) Déterminer le réel  $r$  tel que  $D_y f_r(x, y) = y D_x^2 f_r(x, y) - \frac{x}{y} D_x f_r(x, y)$ ,  $(x, y) \in B$ .

8. On donne la fonction  $f(x, y) = \cos(ax) \sin(by)$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles non nulles.

Montrer que  $f$  vérifie l'équation des ondes  $D_x^2 f - \frac{a^2}{b^2} D_y^2 f = 0$ .

9. L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point  $P$  donné dans les cas suivants :

a)  $T(x, y) = x^2 - y^2$  et  $P$  a pour coordonnées  $(2, 1)$

b)  $T(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$  et  $P$  a pour coordonnées  $(2, 2)$

Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à  $\frac{\pi}{4}$  dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point  $P$ .

## LISTE 5 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES (2)

---

### A préparer AVANT de venir à la répétition

#### I. Dérivation des fonctions composées

1. Qu'appelle-t-on fonction composée ?
2. Quel est l'énoncé du théorème donnant les dérivées partielles d'une fonction composée à partir des dérivées partielles des fonctions de départ ?

#### II. Permutation de l'ordre d'intégration

Qu'appelle-t-on "permutation de l'ordre d'intégration" dans le calcul des intégrales doubles ? Peut-on toujours le faire sans changer la valeur du résultat si on intègre sur un ensemble fermé borné ?

#### III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

Quand une fonction de 2 variables est-elle intégrable sur un ensemble fermé borné ?

---

---

### A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(a-b-c) - 4, II. 1(a) et III. 2(b) - 3(b) seront résolus par l'assistant.

#### I. Dérivation des fonctions composées

1. a) On donne  $f$ , continûment dérivable sur  $] -1, 3[ \times ] -2, 4[$ . On demande le domaine de dérivabilité de la fonction  $F$  définie par  $F(x, y) = f(2x - y, x + 2y)$ , sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de  $F$  en fonction de celles de  $f$ .  
b) Même question pour  $g$ , continûment dérivable sur  $] -1, 1[ \times ] \ln \frac{\pi}{6}, +\infty[$  et  $G(x, y) = g(\exp(2x), \ln(\arcsin(y/2)))$ .
2. On donne la fonction  $g$  continûment dérivable sur  $] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[ \times ] 0, +\infty[ \times ] 0, 3[$ .
  - a) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f : t \mapsto f(t) = g\left(\arcsin\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2 - 1\right)$ .
  - b) Calculer la dérivée de  $f$  en fonction des dérivées partielles de  $g$ .
  - c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en 3/2 ?
  - d) Mêmes questions si  $g$  est continûment dérivable sur  $] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[ \times ] 0, +\infty[ \times ] 0, 3[$ .
3. Soit  $F(t) = f(x(t), y(t))$  avec  $x(2) = 3$ ,  $y(2) = 5$ ,  $(D_x)(2) = -1$ ,  $(D_y)(2) = 4$ ,  $(D_x f)(3, 5) = 6$  et  $(D_y f)(3, 5) = -2$ . En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 2, que vaut  $(DF)(2)$  ?
4. Soit  $F(s, t) = f(u(s, t), v(s, t))$ . En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en (0, 1) si
$$u(0, 1) = -2 \quad (D_s u)(0, 1) = 2 \quad (D_t u)(0, 1) = 4$$
$$v(0, 1) = 5 \quad (D_s v)(0, 1) = 3 \quad (D_t v)(0, 1) = 6$$
et  $(D_u f)(-2, 5) = -1$  et  $(D_v f)(-2, 5) = 8$ , calculer  $(D_s F)(0, 1)$  et  $(D_t F)(0, 1)$ .

5. On donne la fonction  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  définie et 2 fois continûment dérivable sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . On effectue le changement de variables en coordonnées polaires  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  ( $r > 0$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$ ) et on considère  $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ .

Montrer que  $(D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \frac{1}{r^2} (D_\theta F)^2$

Remarque : le premier membre est pris au point de coordonnées  $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  et le second en  $(r, \theta)$ .

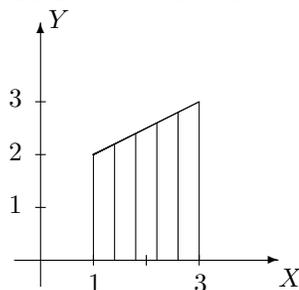
## II. Permutation de l'ordre d'intégration

1. Supposons que la fonction  $f$  est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

a)  $\int_{-1}^2 \left( \int_{y-3}^{3-y} f(x, y) dx \right) dy$       b)  $\int_0^2 \left( \int_y^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx \right) dy.$

2. On considère une fonction  $f$  intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné  $A$  ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale

$$\int \int_A f(x, y) dx dy.$$



## III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé  $A$  délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne  $x - y = 0$  et celui de la fonction  $x \mapsto -x^2$ .

- a) Représenter  $A$  dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.  
b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de  $f$  sur  $A$  si  $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = y \cos(x)$ .

2. Si elle existe, calculer l'intégrale de

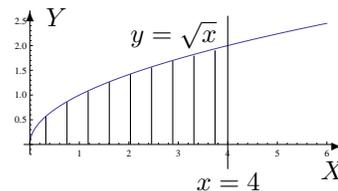
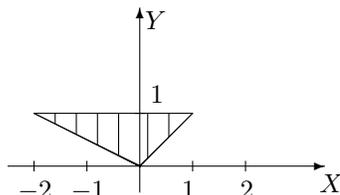
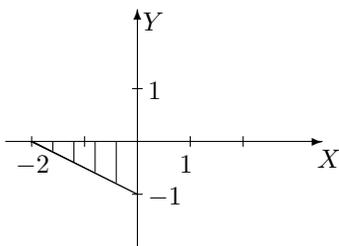
- a)  $f(x, y) = 4 - x^2$  sur  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2], y \in [x^2, 8 - x^2]\}$   
b)  $f(x, y) = \cos(y^2)$  sur  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [-1, x]\}$   
c)  $f(x, y) = x + 2y$  sur  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{4 - x^2}\}\}$   
d)  $f(x, y) = x^2 \cos(xy)$  sur  $A = [-1, 1] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$

3. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble  $A$  borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants

a)  $\int \int_A e^{2x-y} dx dy$

b)  $\int \int_A xy^2 dx dy$

c)  $\int \int_A \frac{y}{\sqrt{4+x^2}} dx dy$



4. Soit  $I = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left( \int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3}) dx \right) dy.$

Représenter l'ensemble d'intégration et calculer l'intégrale si c'est possible.

## LISTE 6 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES (3)

---

### A préparer AVANT de venir à la répétition

#### Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si une fonction est continue sur un ensemble  $A$  non fermé borné parallèle à l'axe  $Y$ , quand dit-on qu'elle est intégrable sur  $A$ ? Comment définit-on alors son intégrale?
  2. Même question si l'ensemble  $A$  est parallèle à l'axe  $X$ .
  3. Si une fonction est continue sur un ensemble  $A$  non fermé borné, quand peut-on permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale?
- 
- 

### A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 2(b) et 4 seront résolus par l'assistant.

#### Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.
  - a)  $\int \int_A \frac{1}{x^2} dx dy$  avec  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2, 0 \leq y \leq \frac{2}{x}\}$
  - b)  $\int_{-\infty}^2 \left( \int_0^{+\infty} e^{2y-x} dx \right) dy$
  - c)  $\int \int_A e^{-x^2} dx dy$  avec  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$
  - d)  $\int \int_A y^3 e^{-xy^2} dx dy$  avec  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 1 \leq xy\}$
2. Déterminer si les intégrales suivantes existent; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

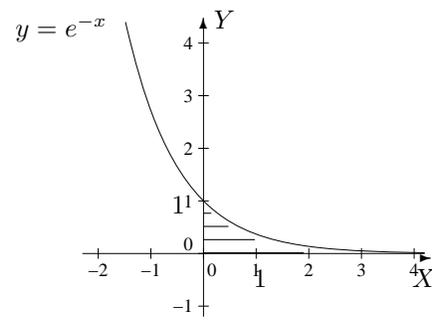
$$a) \int_1^{+\infty} \left( \int_0^{y^2/4} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2} dx \right) dy, \quad b) \int_0^2 \left( \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2} dy \right) dx, \quad c) \int_0^1 \left( \int_0^{4x^2} \frac{1}{x+y} dy \right) dx$$

3. On considère l'intégrale double suivante

$$I = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^x \sin(y-x)e^{-x} dy \right) dx$$

- a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
- b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
- c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales?

4. Calculer l'intégrale de  $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = 2x - y$  sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



# LISTE 7 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES (4)

---

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Volume d'un corps

Quelle est l'interprétation "graphique" de l'intégrale double d'une fonction continue et positive sur un ensemble fermé borné du plan ?

### II. Intégration par changement de variables polaires

1. Que vaut le jacobien dans le cas d'un changement de variables polaires ?
  2. Donner la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.
- 
- 

## A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, l'exercice II. 3 sera résolu par l'assistant.

### I. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

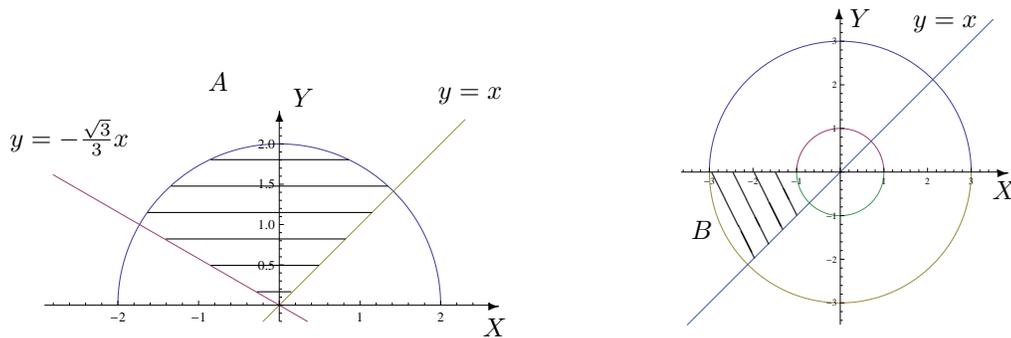
1. Corps borné par la surface d'équation cartésienne  $z = 4 - x^2$  et les plans d'équation  $z = 0$ ,  $y = -2$  et  $y = 3$ .
2. Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation  $x - y + 2z = 4$
3. (\*)<sup>3</sup> Corps borné par la surface d'équation cartésienne  $z = 1 - x^2 - 4y^2$  et le plan d'équation  $z = 0$ .

### II. Intégration par changement de variables polaires

1. Si elle existe, calculer
  - a)  $\int \int_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  où  $A$  est l'ensemble hachuré ci-dessous.
  - b)  $\int \int_B xy dx dy$  où  $B$  est l'ensemble hachuré ci-dessous.
  - c)  $\int \int_C (x + 3y) dx dy$  où  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{4 - x^2}\}\}$ .

---

3. Pour les physiciens ... et ceux qui veulent !



2. Soit  $A$  une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de  $A$  (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées  $(x_A, y_A)$  où

$$x_A = s^{-1} \iint_A x \, dx \, dy, \quad y_A = s^{-1} \iint_A y \, dx \, dy$$

et où  $s$  est l'aire de la surface  $A$ .

Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un quart de cercle de rayon  $R$  ( $R$  réel strictement positif).

3. Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne  $z = 4 - x^2 - y^2$  et par le plan d'équation  $z = 0$ .

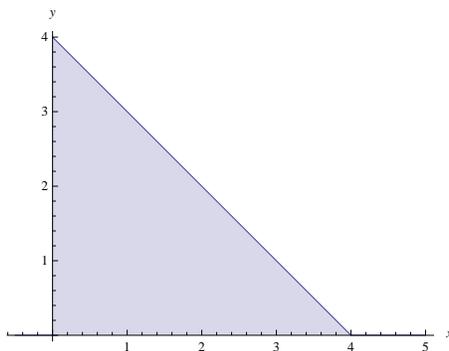
#### IV. Divers

La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \iint_R \delta(x, y) \, dx \, dy,$$

où  $\delta(x, y)$  est la densité au point de coordonnées  $(x, y)$ . Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle  $R$  dont les côtés égaux mesurent  $4 \, m$ . Si la densité en un point  $P$  est directement proportionnelle au carré de la distance de  $P$  au sommet opposé à l'hypoténuse<sup>4</sup>, si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes  $OX$  et  $OY$  sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle  $R$ ,

- quelle est la masse de cette plaque ?
- en quelles unités s'exprime la constante  $K$  ?



4. c'est-à-dire  $\delta(x, y) = K(x^2 + y^2)$  (où  $K$  est une constante)

## LISTE 8 : APPROXIMATIONS POLYNOMIALES

---

### A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Qu'appelle-t-on approximation polynomiale d'une fonction en un point de son domaine de définition ?
  2. Quelle forme cette approximation a-t-elle quand la fonction est suffisamment dérivable ?
  3. (a) Énoncer le résultat appelé "Développement limité de Taylor".  
(b) Relier ce résultat aux notions d'approximation polynomiale et de reste de l'approximation polynomiale d'une fonction en un point.
- 
- 

**Préambule** Cette liste concerne les **approximations polynomiales**.

\*\*\*\*\*

*Qu'entend-on par approximation polynomiale d'une fonction dans le cas où celle-ci est suffisamment dérivable ?*

*Comment introduire ces approximations à partir des connaissances actuelles ?*

*A quoi peuvent servir ces approximations ?*

\*\*\*\*\*

Le *théorème des accroissements finis* pour une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  s'exprime de la manière suivante : quels que soient les réels  $a$  et  $x$  de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le  $\xi$ ) situé entre  $a$  et  $x$ , tel que la valeur de la fonction en  $x$  s'exprime à partir de sa valeur en  $a$  suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x - a)Df(\xi).$$

Ceci peut s'interpréter en disant que l'erreur commise en approchant la valeur de  $f$  en  $x$  par sa valeur en  $a$  est proportionnelle à l'écart entre les deux points ( $a$  et  $x$ ) et à la dérivée de la fonction  $f$  calculée en un réel intermédiaire entre  $a$  et  $x$ .

Lorsque la fonction est plus régulière, ce résultat peut être étendu de la manière suivante (*c'est ce que l'on appelle le développement limité de Taylor*). Si  $f$  est  $p$  fois dérivable dans  $I$ , alors quels que soient les réels  $a$  et  $x$  de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le  $\xi$ ) situé entre  $a$  et  $x$ , tel que la valeur de la fonction en  $x$  s'exprime à partir des valeurs en  $a$  de ses  $p - 1$  premières dérivées suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x - a)Df(a) + \dots + \frac{(x - a)^{p-1}}{(p - 1)!} D^{p-1}f(a) + \frac{(x - a)^p}{p!} D^p f(\xi).$$

La fonction  $P$  définie par

$$P(t) = f(a) + (t - a)Df(a) + \dots + \frac{(t - a)^{p-1}}{(p - 1)!} D^{p-1}f(a), \quad t \in \mathbb{R}$$

est un polynôme de degré au plus  $p - 1$  en la variable  $t$ . Le développement limité de Taylor ci-dessus s'écrit ainsi

$$f(x) = P(x) + \frac{(x - a)^p}{p!} D^p f(\xi)$$

et nous dit que la valeur de  $f$  en  $x$  est approchée par la valeur en  $x$  de ce polynôme, l'erreur commise étant proportionnelle à l'écart entre la  $p^e$  puissance de l'écart entre  $a$  et  $x$  et à la dérivée d'ordre  $p$  de la fonction  $f$  calculée en un réel intermédiaire entre  $a$  et  $x$ .

Si  $a$  est fixé et que la dérivée d'ordre  $p$  de  $f$  est continue en  $a$ , alors on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^p} = 0.$$

Ceci exprime de façon précise la manière dont le polynôme approche la fonction au voisinage de  $a$ . Voir cours pour plus de détails.

Ce genre de résultat est très utile quand il s'agit d'obtenir une estimation de grandeurs physiques.

Ainsi par exemple, la force de marée agissant sur une masse  $m$  peut être définie comme la différence de l'attraction de la Lune sur cette masse située à la surface de la Terre et de l'attraction de la Lune sur cette masse en supposant qu'elle est au centre de la Terre. Si on désigne par  $R$  le rayon terrestre,  $d$  la distance<sup>5</sup> Terre-Lune,  $G$  la constante de gravité,  $M$  la masse de la Lune, on peut alors écrire

$$F = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$

en un point de la surface terrestre situé sur la droite joignant le centre de la Terre et le centre de la Lune. En tenant compte du fait que le rapport  $R/d$  est petit, une expression approximative (simplifiée) de la force  $F$  est donnée par

$$F^{Approx} = \frac{2GMmR}{d^3}.$$

### Exercice après lecture du préambule

Expliquer pourquoi une approximation de  $F$  est donnée par l'expression précédente.

REMARQUE pour cette liste

Plusieurs exercices seront faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.

**A résoudre PENDANT la répétition  
(et à achever à domicile si nécessaire)**

Lors de la répétition, les exercices 1 ( $f_3, f_6$ ) - 2 (b) - 3 seront résolus par l'assistant.

### Approximations polynomiales

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre  $n$  en  $x_0$  pour la fonction  $f_k$ . Représenter  $f_2$  (—ou  $f_3$  ou  $f_5$ —) et ses approximations.

$$f_1(x) = \cos(x) e^{2x}, \quad x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3$$

$$f_2(x) = \sqrt{1+4x}, \quad x_0 = 0, n = 0, 1, 2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2-x}, \quad x_0 = 0, n = 0, 1, 2$$

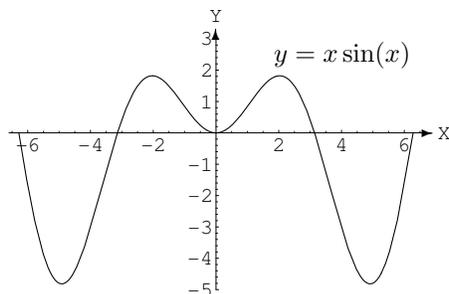
$$f_4(x) = \operatorname{arctg}(x), \quad x_0 = 0 \text{ (resp. } x_0 = 1), n = 0, 1, 2$$

$$f_5(x) = \sin^2(x), \quad x_0 = 0, n = 0, 1, 2$$

$$f_6(x) = \cos(x), \quad x_0 = 1, n = 0, 1, 2$$

2. a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction  $\sin$  et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.  
 b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1, 2 et 3 de la fonction  $f(x) = x \sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où  $f$  est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.

(Suggestion :  $|\sin(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ )



5. entre les centres respectifs

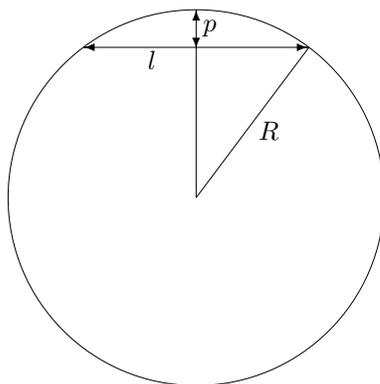
3. Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre  $e$  avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...

*Comment peuvent-ils procéder ?*

4. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 0, 1, 2, 3 en 0 des fonctions données par<sup>6</sup>

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x-2}{2x^2-x-1}.$$

5. Un tunnel d'une longueur  $l$  relie deux points de la surface de la Terre. Si  $R$  désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale  $p$  de ce tunnel.



---

6. *Suggestion.* Utiliser le développement de  $\ln(2-x)$  et  $\ln(2+x)$ ; décomposer en fractions simples

# LISTE 9 : SUITES

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Définitions

1. Une suite est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des naturels ou des entiers ou encore un sous-ensemble infini de ceux-ci.
2. Une sous-suite de la suite  $x_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) est une suite dont les éléments sont pris dans l'ensemble  $\{x_m : m \in \mathbb{N}_0\}$  en conservant la croissance stricte des indices. Une sous-suite de la suite  $x_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) est une suite notée  $x_{k(m)}$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) avec  $k(m) < k(m+1)$  pour tout  $m$ .
3. Une suite de réels  $x_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) converge
  - 1) vers un nombre  $a$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $M \in \mathbb{N}_0$  tel que  $|x_m - a| \leq \varepsilon$ ,  $\forall m \geq M$ .
  - 2) vers l'infini si, pour tout  $R > 0$ , il existe  $M \in \mathbb{N}_0$  tel que  $|x_m| \geq R$ ,  $\forall m \geq M$ .On démontre que si une suite converge, sa limite est unique.
4. Une suite numérique réelle  $x_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) est croissante (resp. décroissante) si  $m < m' \Rightarrow x_m \leq x_{m'}$  (resp.  $x_m \geq x_{m'}$ )  $\forall m, m' \in \mathbb{N}_0$ .  
Comment vérifier la croissance (resp. décroissance) d'une suite  $x_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) ?
  - a) Montrer que  $x_{m+1} - x_m \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ )  $\forall m \in \mathbb{N}_0$ .
  - b) Si les éléments de la suite sont strictement positifs, on peut aussi montrer que  $\frac{x_{m+1}}{x_m} \geq 1$  (resp.  $\leq 1$ )  $\forall m \in \mathbb{N}_0$ .

### II. Propriétés

1. Toute suite numérique réelle croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge vers la borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble de ses éléments.
2. Si la suite  $x_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) de complexes non nuls converge vers 0 (resp.  $\infty$ ) alors la suite  $\frac{1}{x_m}$  converge vers  $\infty$  (resp. 0).
3. La suite  $x_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) converge vers  $l$  (réel ou  $\infty$ ) si et seulement si toute sous-suite de  $x_m$  converge vers  $l$ .  
**Critère de divergence** : si, d'une suite  $x_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ), on peut extraire deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes alors la suite  $x_m$  diverge.
4. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . La suite  $a^m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ )  $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ converge vers } 0 \text{ si } |a| < 1 \\ 2) \text{ converge vers } \infty \text{ si } |a| > 1 \\ 3) \text{ converge vers } 1 \text{ si } a = 1 \\ 4) \text{ diverge si } a = -1 \end{array} \right.$
5. **Critère de comparaison** : soient 2 suites numériques réelles  $x_m$  et  $y_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ).  
Si la suite  $x_m$  converge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) et si la suite  $y_m$  est telle que  $x_m \leq y_m \forall m \in \mathbb{N}_0$  (resp.  $y_m \leq x_m \forall m \in \mathbb{N}_0$ ) alors la suite  $y_m$  converge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
6. **Théorème de l'étau** : soient 3 suites numériques réelles  $x_m$ ,  $y_m$  et  $z_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ).  
Si les suites  $x_m$  et  $y_m$  convergent vers  $a$  et si  $z_m$  est tel que  $x_m \leq z_m \leq y_m \forall m \in \mathbb{N}_0$  alors la suite  $z_m$  converge vers  $a$ .

**A résoudre PENDANT la répétition  
(et à achever à domicile si nécessaire)**

Lors de la répétition, les exercices Ex 1 (b-d-g-h) - Ex 3 - Ex 4 (i-ii) seront résolus par l'assistant.

**Suites**

1. Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence :

a)  $x_m = \frac{3m^2 + 2m + 1}{4m^2 + 1} \quad (m \in \mathbb{N})$

f)  $x_k = \sqrt[k]{k^3} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$

b)  $x_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \quad (n \in \mathbb{N})$

g)  $x_n = \frac{n \cos(n!)}{n^2 + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$

c)  $x_n = 2n - \sqrt{n^3 + n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$

h)  $x_j = \frac{(j-1)!}{j^j} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$

d)  $x_n = \frac{3n + (-1)^{n+1}}{4n + (-1)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

i)  $x_j = \frac{j! (j+1)!}{(2j+1)!} \quad (j \in \mathbb{N})$

e)  $x_n = \ln(3n^2 + n) - \ln(3n - 1) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

j)  $x_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  définie par

$$u_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{2n}$$

est divergente.

3. Montrer que la suite  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence selon

$$x_0 = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad x_j = \sqrt{6 + x_{j-1}} \quad , \forall j \in \mathbb{N}_0$$

est croissante et majorée. En déduire la convergence et la limite de cette suite.

4. Soient  $a, b \in \mathbb{R}_0$  avec  $a \neq 1$  ainsi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_{n+1} = au_n + b, \quad u_0 \in \mathbb{R}.$$

i) En supposant que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, quelle est la seule limite  $L$  possible de cette suite ?

ii) Définissons  $v_n = u_n - L$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique et en déduire l'éventuelle convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

iii) Application : considérons un carré de côté égal à 1. Partageons-le en 9 carrés égaux et colorions le carré central. Ensuite, pour chaque carré non colorié, réitérons le procédé. Notons  $A_n$  l'aire coloriée après l'étape  $n$ . Quelle est la limite de la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $A_0 = 0$  ?

---

7. Suggestion : Montrer par récurrence sur  $n$  que  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

# LISTE 10 : SÉRIES (1)

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### Définitions et propriétés

1. Qu'appelle-t-on
  - a) série de terme général  $x_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) ?
  - b) série convergente ? divergente ?
  - c) somme d'une série convergente ?
  - d) série géométrique ?
  - e) série de Riemann ?
2. Définir la fonction exponentielle par une série.
3. Dans quel cas une série géométrique converge-t-elle ? Que vaut alors sa somme ?
4. Dans quel cas une série de Riemann converge-t-elle ?
5. Que peut-on dire d'une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ?
6. Citer
  - a) le critère de comparaison des séries
  - b) le critère des séries alternées

## A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices Ex 1 (a-e-f) - Ex 2 (e-f-g) seront résolus par l'assistant.

### Séries

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

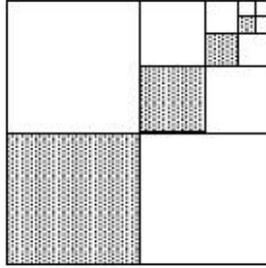
$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^2} & \text{b) } \sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^j & \text{c) } \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{j^2 + 2}{j^3 + 3} & \text{d) } \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j^2 + \sqrt{2}} \\ \text{e) } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{\sqrt{k}} & \text{f) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})}{n \ln(n)} & \text{g) } \sum_{n=1}^{+\infty} n \cos\left(\frac{1}{n}\right) & \text{h) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \end{array}$$

2. Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{j=0}^{+\infty} (\sqrt{3})^j & \text{b) } \sum_{j=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^j & \text{c) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} & \text{d) } \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)(j+3)} \\ \text{e) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} & \text{f) } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^{2k-1}}{k!} & \text{g) } \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 4} & \text{h) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1}\right) \end{array}$$

3. Ecrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel  $1,5909090\dots$

4. Un carré de  $6\text{ cm}$  de côté est divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes). Le carré inférieur gauche est ombré. Le carré supérieur droit est à nouveau divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes) et le carré inférieur gauche est ombré. On répète indéfiniment ce processus comme montré sur la figure ci-dessous. Quelle est la surface ombrée totale ?



5. Une balle est lâchée d'une hauteur de  $3\text{ m}$ . Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute. Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?
6. Démontrer l'égalité

$$\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) + \cos^6(\theta) + \dots = \cotg^2(\theta).$$

A quelle(s) condition(s) cette égalité est-elle vraie ?

## LISTE 11 : SÉRIES (2)

**A résoudre PENDANT la répétition  
(et à achever à domicile si nécessaire)**

### Séries

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\text{a) } \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^4 + j + 2}{j^4 + 5j^2 + 10} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k^3}}{(k+1)^4 + 1} \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n^4 + 1}$$

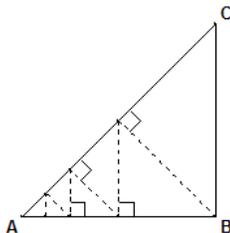
$$\text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e}{4n + 5} \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[p]{n^5 + 1}} \quad (p \in \mathbb{N}_0) \quad \text{g) } \sum_{k=1}^{+\infty} e^{ak} \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \sqrt{3}}$$

2. Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent (on donne  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < ab < c$  et  $c \neq 0$ ) :

$$\text{a) } \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^{j+4}}{j! \ln(9)} \quad \text{b) } \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\right)^j \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 7k + 12} \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} b^n}{c^{n+3}}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{n(n+2)(n+4)} \quad \text{f) } \sum_{n=3}^{+\infty} \ln\left(4 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{g) } \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{k}{2k+3}\right)$$

3. Soit  $ABC$  un triangle rectangle isocèle tel que  $|BC| = a$  cm ( $a > 0$ ) comme représenté ci-dessous. Une puce qui se trouve en  $B$  se déplace le long d'une droite perpendiculaire au segment  $[AC]$ . Lorsqu'elle atteint ce segment, elle tourne et revient sur le segment  $[AB]$  en prenant une route perpendiculaire à  $[AB]$ . Elle fait ainsi l'aller-retour entre les côtés  $[AB]$  et  $[AC]$  du triangle jusqu'à ce qu'elle atteigne le point  $A$ . Quelle sera la distance parcourue par la puce ?



# LISTE 12 : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (1)

## Préambule

Les exercices de cette liste et de la suivante montrent des applications de notions mathématiques étudiées dans le cadre du cours de Mathématiques générales. Ces applications relèvent de la physique, de la biologie, du calcul des probabilités, de la géographie et même de la cryptographie.

**A résoudre PENDANT la répétition  
(et à achever à domicile si nécessaire)**

## Fonctions de plusieurs variables

1. En thermodynamique, il existe essentiellement 3 types d'équilibres macroscopiques : l'équilibre thermique, l'équilibre mécanique et l'équilibre osmotique (mélange homogène<sup>8</sup>). Dès lors, par définition, un *équilibre thermodynamique* est atteint lorsque ces 3 équilibres sont réunis.

Selon le premier postulat de la thermodynamique, *l'équilibre thermodynamique d'un système physique se définit à l'aide de 3 paramètres : l'énergie interne  $U$ , le volume  $V$  et le nombre de particules  $N$  du système.*

Le second postulat stipule qu'*il existe une fonction  $S$ , dépendant de  $U$ ,  $V$  et  $N$ , qui est maximale à l'équilibre thermodynamique.* Cette fonction est appelée *entropie* du système et la connaître, c'est connaître l'ensemble du système. Cette fonction permet de plus de déterminer les *équations d'état* qui régissent le système : ces dernières font intervenir les dérivées partielles de  $S$  et sont données par

$$D_U S = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} = \frac{1}{T} \quad D_V S = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} = \frac{p}{T} \quad D_N S = \left( \frac{\partial S}{\partial N} \right)_{V,U} = \frac{-\mu}{T}$$

où

- $T$  est la température du système ;
  - $p$  est la pression du système ;
  - $\mu$  est le potentiel chimique du système (qui renseigne sur l'équilibre osmotique d'un système<sup>9</sup>) ;
- et où les variables indicées sont considérées comme constantes.

Sachant que l'entropie du gaz de Van Der Waals (archétype des gaz réels), est donnée par

$$S = k_B N \ln \frac{V - N v_0}{N} + \frac{3 k_B N}{2} \ln \left( \frac{U + \frac{K_i N^2}{V}}{N} \right) + \frac{3 k_B N}{2} \ln \left( \frac{4 \pi m}{3 \hbar^2} \right) + \frac{5}{2} k_B N$$

où

- $k_B$  est la constante de Boltzmann et vaut approximativement  $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ,
  - $v_0$  est le volume occupé par une particule et dans lequel les autres particules ne peuvent pénétrer,
  - $K_i > 0$  est le paramètre d'interaction entre les particules,
  - $m$  est la masse d'une particule,
  - $\hbar$  est la constante de Planck et vaut  $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ ,
- déterminer les équations d'état d'un tel gaz lorsque le nombre de particules  $N$  est constant et, à partir de la première équation d'état, exprimer l'énergie interne  $U$  en fonction de  $V$ ,  $N$  et  $T$ .

8. Par exemple, si on jette une goutte d'encre dans un verre d'eau, l'encre va "diffuser" dans le liquide et l'équilibre est atteint lorsque l'encre est mélangée de façon homogène avec l'eau.

9. De manière générale, si deux substances de potentiels chimiques respectifs  $\mu_1, \mu_2$  sont mises en présence l'une de l'autre, l'équilibre thermodynamique est atteint lorsque  $\mu_1 = \mu_2$ .

2. La pression  $P$  (en  $kPa$ ), le volume  $V$  (en  $l$ ) et la température  $T$  (en  $K$ ) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation<sup>10</sup> :

$$PV = 8,31 T.$$

Sachant que, lors d'une mesure à l'instant  $t$ , la température d'un tel gaz, qui est de  $400K$ , augmente à la vitesse de  $0,1K/s$  et que son volume, qui est de  $200l$ , augmente à raison de  $0,2l/s$ , déterminer la vitesse de variation de la pression de ce gaz.

3. La recherche des extrema d'une fonction à une seule variable est relativement aisée : il suffit de rechercher les valeurs en lesquelles la dérivée de cette fonction s'annule et de voir s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion. Cette recherche s'avère plus délicate pour une fonction de plusieurs variables. Cependant, pour une fonction de 2 variables, nous disposons du test suivant, appelé *test des dérivées partielles* :

Soient  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(a, b) \in A$  et  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  une fonction 2 fois continûment dérivable sur  $A$  telle que

$$(D_x f)(a, b) = (D_y f)(a, b) = 0.$$

Posons

$$D = (D_x^2 f)(a, b)(D_y^2 f)(a, b) - [(D_x D_y f)(a, b)]^2.$$

- (a) Si  $D > 0$  et si  $(D_x^2 f)(a, b) > 0$  alors  $f(a, b)$  est un minimum local de  $f$  ;
- (b) Si  $D > 0$  et si  $(D_x^2 f)(a, b) < 0$  alors  $f(a, b)$  est un maximum local de  $f$  ;
- (c) Si  $D < 0$  alors  $f(a, b)$  n'est ni un minimum local, ni un maximum local de  $f$  ;  $(a, b)$  est appelé "point-selle" ;
- (d) Si  $D = 0$  alors le test n'est pas concluant.

En se basant sur ce test,

- a) rechercher les extrema ainsi que les points-selles de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^4 + y^4 - 2xy + 1.$$

- b) déterminer la distance<sup>11</sup> (c.-à-d. la plus courte distance) entre le point de coordonnées  $(-1, 0, 2)$  et le plan d'équation cartésienne  $2x + y + z = 4$ .

4. Si une charge électrique est répartie sur une région  $R$  et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par  $\rho(x, y)$  en un point  $(x, y)$  de  $R$ , alors la charge totale  $Q$  présente sur cette région est donnée par

$$Q = \iint_R \rho(x, y) \, dx dy.$$

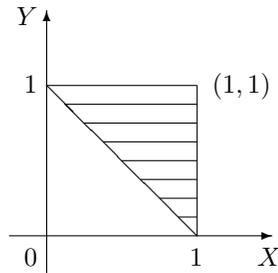
Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire  $D$  de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en  $(x, y)$  est donnée par  $\rho(x, y) = 2xy$ , mesurée en coulombs par mètre carrés ( $C/m^2$ ). Calculer la charge totale présente sur  $D$ .

10. Cette équation est l'une des équations d'état d'un gaz parfait, obtenue par dérivation partielle de l'entropie d'un tel gaz (cf. exercice précédent).

11. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  est donnée par

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

et, comme  $d \geq 0$ , minimiser  $d$  équivaut à minimiser  $d^2$ .



5. En physique, le *moment d'inertie* d'une masse ponctuelle  $m$  par rapport à un axe est défini par le produit  $mr^2$ , où  $r$  est la distance entre la masse ponctuelle  $m$  et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région  $R$  du plan et dont la densité en  $(x, y)$  est donnée par  $\rho(x, y)$ , de la manière suivante.

Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut

$$I_X = \iint_R x^2 \rho(x, y) \, dx dy \quad \left( \text{resp. } I_Y = \iint_R y^2 \rho(x, y) \, dx dy \right).$$

Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine  $O$ , celui-ci étant donné par

$$I_O = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dx dy.$$

On remarque évidemment que  $I_O = I_X + I_Y$ .

Soit un disque homogène  $D$  de densité  $\rho(x, y) = \rho$  et de diamètre  $d$ . Déterminer

- le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre ;
  - le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque  $d'$  passant par son centre.
6. Dans certains contextes, le calcul de probabilités peut se ramener à du calcul intégral. En effet, lorsque l'on modélise une quantité  $X$  à l'aide d'une fonction de densité  $x \mapsto f_X(x)$  positive, intégrable sur  $\mathbb{R}$  et d'intégrale égale à 1, la probabilité que cette quantité soit supérieure (resp. inférieure) à une valeur  $a \in \mathbb{R}$  (resp.  $b \in \mathbb{R}$ ) est donnée par

$$\mathbb{P}[X > a] = \int_a^{+\infty} f_X(x) \, dx \quad \left( \text{resp. } \mathbb{P}[X < b] = \int_{-\infty}^b f_X(x) \, dx \right).$$

De plus, si l'on s'intéresse à une autre quantité  $Y$  que l'on désire étudier conjointement avec  $X$ , ces deux quantités peuvent être modélisées simultanément à l'aide d'une fonction de densité jointe  $(x, y) \mapsto f_{(X,Y)}(x, y)$  positive et intégrable sur  $\mathbb{R}^2$  et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx \right) dy = 1,$$

auquel cas la probabilité que  $(X, Y) \in R$  ( $R$  partie de  $\mathbb{R}^2$ ) est donnée par

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{(X,Y)}(x, y) \, dx dy.$$

Le patron d'une fabrique de batteries destinées aux appareils électroniques tels que les GSM, les MP-3, etc... s'intéresse à la longévité de ses produits et décide d'étudier conjointement le nombre maximal (qu'il note  $X$ ), ainsi que le nombre minimal (qu'il note  $Y$ ), d'années de fonctionnement de ces derniers. Après bien des calculs, il arrive à la conclusion que la fonction de densité jointe de  $X$  et  $Y$  est de la forme

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (a) Déterminer la constante  $C$  pour que la fonction  $f_{(X,Y)}$  soit bien une fonction de densité jointe.  
(b) Calculer la probabilité qu'une batterie fonctionne au plus 8 ans mais au moins 3 ans.
7. Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , modélisées respectivement par les fonctions de densité  $f_X$  et  $f_Y$ , sont dites indépendantes lorsque leur fonction de densité jointe vaut le produit de leurs fonctions de densité respectives, c.-à-d.

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

En outre, un temps d'attente  $T$  est modélisé par une fonction de densité de la forme

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-\frac{t}{\mu}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

où  $\mu > 0$  est le temps d'attente moyen.

Le directeur d'un cinéma constate que le temps d'attente moyen pour obtenir un ticket est de 12 minutes, et celui pour obtenir une boisson fraîche de 6 minutes. En supposant que ces temps d'attente sont indépendants, calculer la probabilité qu'un spectateur attende au total moins de 24 minutes avant de prendre place en ayant son ticket et une boisson.

## LISTE 13 : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (2)

---

### Calcul matriciel

1. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} Dx(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) \\ Dy(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) \\ Dz(t) &= -2x(t) - 4y(t) + 2z(t) \end{cases} .$$

Déterminer les composantes  $(x(t), y(t), z(t))$  du vecteur position de cette particule à tout instant  $t$ .

2. Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé ( $I$ ), malade ( $M$ ), non malade et non immunisé ( $S$ ). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,8 ou passer à l'état  $S$  avec une probabilité 0,2 ;
  - étant dans l'état  $S$ , il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état  $M$  avec une probabilité 0,2 ;
  - étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,1 ou passer à l'état  $S$  avec une probabilité 0,9.

Déterminer

- a) la matrice de transition du système ;
  - b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;
  - c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.
3. Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :
- étant dans le sol, la molécule a 2 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 3 chance sur 10 de disparaître ;
  - étant dans l'herbe, elle a 3 chance sur 10 de revenir dans le sol, 1 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;
  - étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;
  - si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.

Déterminer la matrice de transition du système.

4. La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible. Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le decode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.

Considérons le message

SUIS EN DANGER

ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1, B correspond à 2, ..., Z correspond à 26. En outre, on assigne le nombre 27 à un espace. Ainsi, le message devient :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \text{S} & \text{U} & \text{I} & \text{S} & * & \text{E} & \text{N} & * & \text{D} & \text{A} & \text{N} & \text{G} & \text{E} & \text{R} \\ 19 & 21 & 9 & 19 & 27 & 5 & 14 & 27 & 4 & 1 & 14 & 7 & 5 & 18 \end{array} \cdot$$

Puisqu'on emploie une matrice  $2 \times 2$ , on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs<sup>12</sup>  $1 \times 2$  :

$$(19 \ 21), (9 \ 19), (27 \ 5), (14 \ 27), (4 \ 1), (14 \ 7), (5 \ 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage  $C$ , ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par  $C$ , ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2, 25, -10, 39, 22, -39, -13, 53, 3, -5, 7, -7, -13, 44.$$

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il doit donc calculer le produit

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 19 & 21 & 9 & 19 & 27 & 5 & 14 & 27 & 4 & 1 & 14 & 7 & 5 & 18 \\ \text{S} & \text{U} & \text{I} & \text{S} & * & \text{E} & \text{N} & * & \text{D} & \text{A} & \text{N} & \text{G} & \text{E} & \text{R} \end{array} \cdot$$

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$$-39, -33, 72, 4, 10, 46, -27, -38, 107, -21, -24, 111, 17, 3, 116, 1, -9, 104, -39, -26, 99.$$

L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Blond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des "27", ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message ...  
Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.

### Approximations polynomiales

La vitesse  $v$  d'une vague est liée à sa longueur d'onde  $\lambda$  et à la profondeur  $h$  de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \left( \frac{2\pi h}{\lambda} \right),$$

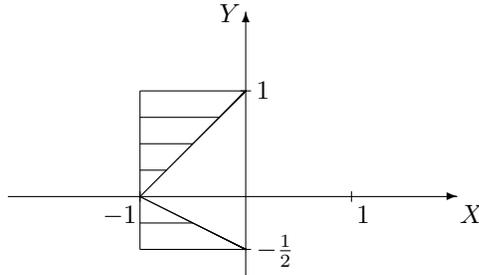
où  $g$  est l'accélération due à la pesanteur.

- Sachant que  $\operatorname{th} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ , déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.
- Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon en 2011 avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?

## LISTE 14 : RÉVISIONS EN VUE DE L'EXAMEN

### Fonctions de plusieurs variables

1. On donne la fonction  $f : (x, y) \mapsto \ln \left( \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \right)$ .
  - a) Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère ortho-normé.
  - b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées  $(-3, 1)$ .
  
2. Soit  $f$  une fonction continûment dérivable sur  $] -1, 4[ \times ] 1, 4[$ . On demande le domaine de dérivabilité de la fonction  $F$  définie par  $F(x, y) = f(x^2 + y, 4x^2 + y^2)$ , sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de  $F$  en fonction de celles de  $f$ .
  
3. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes
  - a)  $I = \int_0^9 \left( \int_{\sqrt{x}}^3 x \cos(y^5) dy \right) dx$
  - b)  $I = \iint_A e^{-y^2} dx dy$  si  $A$  est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous



- c)  $I = \iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} dx dy$  si  $A = [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$
  - d)  $I = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^3 \frac{e^{-(y+1)x}}{9+y^2} dy \right) dx$
4. Calculer le volume du corps de l'espace borné par les surfaces d'équation cartésienne  $x + z = 3$  et  $x^2 + y = 4$  et les plans d'équation  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Donner aussi une représentation graphique de ce corps.

### Calcul matriciel

1. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable? Pourquoi? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Approximations polynomiales

Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre  $n = 0, 1, 2$  et  $3$  en  $x_0 = 0$  pour la fonction

$$f : x \mapsto \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Représenter  $f$  et ses approximations.

### Séries

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$(1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3 \cos(k\theta)}{k(k+1)} \quad (\theta \geq 0) \qquad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n}{2n}.$$

2. Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :

$$(1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{k}} \quad (2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k+5)(2k+7)} \quad (3) \sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n \right] \quad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n(x+1)}{n!} \quad (x > -1).$$