1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales : partim B'
Répétition 1* : Physique

Version 15 mars 2017

Répétition 1* : compléments d'algèbre linéaire et compléments sur les équations différentielles (1)

Exercices à résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I.1, II.(d), III.(b), IV.(d) et V.(d) seront résolus par l'assistant.

I. Représentation d'un opérateur linéaire dans une base, changement de base

1. Soit l'opérateur
$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x-2y \\ -5x+y \end{pmatrix}.$$
(a) Vérifier que cet opérateur est linéaire.
(b) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base constituée des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ de composantes respectives $(1,0)$, $(0,1)$ (appelée *base canonique* du plan) de $\mathbb{R}^2$.
(c) Vérifier que les vecteurs
$$\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \qquad \vec{e'}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$
constituent une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.
(d) Déterminer la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
(e) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base $\mathcal{B}'$.
(f) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2$ formant une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle T est représenté par une matrice diagonale.

2. Soit l'opérateur
$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y+z \\ -6x+4y+2z \\ 3x-y+z \end{pmatrix}.$$
(a) Vérifier que cet opérateur est linéaire.
(b) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
(c) Vérifier que les vecteurs
$$\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \qquad \vec{e'}_2 = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \qquad \vec{e'}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$
constituent une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
(d) Déterminer la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
(e) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base $\mathcal{B}'$.
(f) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2, \vec{e''}_3$ formant une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle T est représenté par une matrice diagonale.

3. On considère le plan muni du repère orthonormé $(O;\mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base canonique du plan et on note cet espace vectoriel E. Soit le vecteur
$$\vec{b} = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\|}$$
et l'opérateur
$$\mathcal{P} : E \to E,\ \vec{x} \mapsto (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{b}.$$

(a) Cet opérateur est-il linéaire ?
(b) Si oui, en déterminer la représentation matricielle P dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Cette matrice P est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, en déterminer une forme diagonale P' ainsi qu'une matrice S y conduisant.
Interpréter le passage de P à P' et caractériser la base dans laquelle $\mathcal{P}$ est représenté par P'.
(c) A quoi correspond concrètement l'image d'un vecteur quelconque par cet opérateur ?

II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle sur lequel on travaille (f est une fonction de la variable réelle x).

(a) $D^3f(x) - 12Df(x) + 16f(x) = 32x - 8$

(b) $D^3f(x) + 2D^2f(x) - Df(x) - 2f(x) = e^x + x^2$

(c) $D^2f(x) - 2Df(x) + 3f(x) = \sin(x)$

(d) $D^3f(x) + Df(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

III. Equations d'Euler

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $]0, +\infty[$ (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $x^2D^2f(x) + xDf(x) + f(x) = 1$

(b) $x^2D^2f(x) - xDf(x) + f(x) = x$

(c) $x^3D^2y - x^2Dy - 3xy + 16\ln(x) = 0$

IV. Equations différentielles à second membre linéaire

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant le domaine sur lequel on travaille (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $(1 + x^2)Dy(x) - 2xy(x) = (1 + x^2)^2$

(b) $Df(x) + 2xf(x) = 2xe^{-x^2}$

(c) $xDy(x) + y(x) = -x^3$

(d) $x^3Df(x) + (2 - 3x^2)f(x) = x^3, \quad f(1) = \frac{1}{2}$

(e) $xDy(x) + 1 = \dfrac{1}{\ln(x)}y(x), \quad y(e) = 1$

(f) $Df(x) = \sin(x) - \operatorname{cotg}(x)f(x), \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

V. Equations exactes

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille (f et u sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $xDf(x) + f(x) + x^3 = 0$

(b) $\ln(x)Du + \dfrac{u}{x} = \dfrac{3}{x}\ln^2(x)$

(c) $Du = -\dfrac{3x^2u - u^3}{x^3 - 3xu^2}$

(d) $Df(x) = -\dfrac{f(x)\cos(xf(x)) + 2x}{x\cos(xf(x))}$

(e) $x^2Df(x) + 4f(x)Df(x) + 2xf(x) - 1 = 0$