1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales : partim B'

Répétition 2* : Physique

Version 21 mars 2017

Répétition 2* : compléments sur les équations différentielles (2)

A résoudre PENDANT la répétition
(et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I (a) et II (b) seront résolus par l'assistant.

I. Equations à second membre séparé

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille (f, y et u sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $2\sqrt{f(x)} = Df(x)$

(b) $xf(x)Df(x) + f^2(x) + 1 = 0, \quad f(1) = 1$

(c) $(1 + e^x)f(x)Df(x) = e^x$

(d) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}Dy = 0$

(e) $Du - 2xu = x$

II. Equations différentielles à second membre homogène

Résoudre les équations différentielles suivantes (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Df(x) = \dfrac{x}{f(x)} + \dfrac{f(x)}{x}$

(b) $y(x) + (2\sqrt{xy(x)} - x)Dy(x) = 0$

(c) $xDy(x) = y(x)\ln\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$

(d) $y^2(x) - 3x^2 + 2xy(x)Dy(x) = 0$

(e) $f^2(x) + x(x - f(x))Df(x) = 0$

III. Equations différentielles - Types

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer **SANS LA RESOUDRE** le type d'équation dont il s'agit ainsi qu'une méthode pour la résoudre (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Dy(x) = \dfrac{2y^2(x) - xy(x)}{x^2 - xy(x) + y^2(x)}$

(b) $Dy(x) = -\dfrac{2y(x)+1}{x}$

(c) $Df(x) = \dfrac{e^{2f(x)} - f(x)\cos(xf(x))}{x\cos(xf(x)) - 2xe^{2f(x)} - 2f(x)}$

(d) $(1 - x^2)Dy(x) = y(x) - (x+1)^2(x-1)$

(e) $x^2D^2f(x) + xDf(x) + f(x) = \dfrac{1}{\cos(\ln(x))} + 2\sin(\ln(x))$

(f) $D^6f(x) - 2D^4f(x) - 4D^2f(x) + 8f(x) = e^{\sqrt{2}x} + \cos(x)$

(g) $(x^2 + 2xy(x) - y^2(x)) + (y^2(x) + 2xy(x) - x^2)Dy(x) = 0$

(h) $\sqrt{1-x^2}Df(x) - f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

IV. Equations différentielles - Résolution

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, le domaine sur lequel on travaille (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Dy(x) + y(x)\text{cotg}(x) = 5e^{\cos(x)}$

(b) $xDf(x) - f(x) = x^2e^x$

(c) $3y^2(x)Dy(x)x + y^3(x) = x + 1$

(d) $x^2D^2f(x) - 2f(x) = 2x - 1$, sur $]0, +\infty[$

(e) $Df(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\sin(f(x))}$

(f) $D^2y(x) + \omega^2y(x) = \dfrac{1}{\cos(\omega x)}$

(g) $(x - f(x))Df(x) = f(x)$ (Sugg. : poser $u = \frac{f(x)}{x}$)

(h) $D^3y(x) - 2D^2y(x) + Dy(x) = xe^x$

V. Divers

1. L'équation de la déformation d'une poutre élastique supportant une charge uniformément répartie sur toute sa longueur l est donnée par
$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0 \qquad , \qquad 0 \leq x \leq l$$
où EI représente la rigidité flexionnelle de la poutre et où w_0 représente la charge par unité de longueur.
Déterminer la déformation d'une poutre encastrée à ses deux extrémités, c'est-à-dire telle que
$$y(0) = y(l) = 0 \qquad , \qquad Dy(0) = Dy(l) = 0.$$

2. La distribution de la température $T(r)$ dans la région comprise entre deux cylindres concentriques de rayons $r = a$ et $r = b$ $(a < b)$ est gouvernée par la loi
$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{où} \quad T(a) = T_0,\ T(b) = T_1.$$
Déterminer $T(r)$.

3. Dans les conditions d'équilibre des phases liquide-vapeur d'un corps pur, la formule de Clapeyron exprimant la chaleur latente L de changement d'état (volume de la phase liquide négligeable devant le volume de la phase gazeuse) s'écrit
$$L = \frac{RT^2}{p}\frac{dp}{dT}.$$
De cette expression, donner la loi de variation de la pression p en fonction de la température T.
Si un système physique est tel que, à une température initiale T_0, la pression vaut p_0, déterminer la loi particulière de variation de la pression qui régit ce système.

4. Un médecin arrivant sur le lieu d'un crime constate que la température du mort est de 32° et que la température de l'air ambiant est de 18°C. Deux heures plus tard, la température du mort est descendue à 26°. En supposant que le taux de refroidissement du corps est proportionnel à la différence de température entre l'air et le corps de la victime (loi de Newton) et que la température du corps au moment du décès était de 36°C, déterminer le temps écoulé depuis la mort de la victime jusqu'à l'arrivée du médecin.