1, 2, 3...Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales : partim B'

Répétition 5* : Physique

Version 5 mai 2017

Répétition 5* : intégrales de surfaces et formules de Gauss, Green et Stokes

---

A propos de cette liste

Les intégrales de surface interviennent dans beaucoup de situations physiques, particulièrement pour les calculs de flux.
Par exemple, lorsque $\vec{E}$ représente un champ électrique, l'intégrale de surface

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \phi_e,$$

où $\vec{n}$ la normale unitaire à la surface, est appelée le **flux du champ électrique** $\vec{E}$ traversant la surface $\mathcal{S}$.
Une des importantes lois de l'électrostatique est la **loi de Gauss** qui stipule que la charge totale à l'intérieur d'une surface fermée (c'est-à-dire le bord d'un borné fermé de $\mathbb{R}^3$) $\mathcal{S}$ est donnée par

$$Q = \epsilon_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

où ϵ_0 est la permittivité du milieu (constante déterminée expérimentalement).

L'étude du **flux de chaleur** constitue une autre application des intégrales de surface. En supposant que la température en un point $P(x, y, z)$ d'un corps est $T(x, y, z)$, le *transfert d'énergie thermique* a lieu selon le champ vectoriel ($\star$)

$$\vec{F} = -K \operatorname{grad} T = -K \vec{\nabla} T$$

où K est la conductivité de la substance (constante déterminée expérimentalement). La quantité de chaleur transmise à travers une surface fermée $\mathcal{S}$ dans le corps par unité de temps est alors donnée par

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = -K \iint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

où $\vec{n}$ la normale unitaire extérieure à la surface.

En ce qui concerne les formules de Green, Gauss et Stokes, elles permettent de relier les intégrales curviligne et de surface aux intégrales doubles et triples sur des ensembles bornés fermés.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I.(2), II.(3) seront résolus par l'assistant.

I. Paramétrages et intégrales de surfaces

1. Soit $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé de l'espace. On donne l'équation cartésienne $x^2+y^2-z^2 = 0$.
(a) Représenter l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient cette équation.
Comment s'appelle cet ensemble ?
(b) Déterminer un paramétrage de la surface $\mathcal{S}$ correspondant aux points de cet ensemble dont la cote z est comprise entre 0 et 4.
(c) Calculer l'aire de cette surface $\mathcal{S}$.

2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan, on considère l'arcade de cycloïde paramétrée par

$$(t - \sin t,\ 1 - \cos t)\,, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Déterminer un paramétrage de la surface $\mathcal{A}$ délimitée par cette arcade de cycloïde et l'axe des abscisses.
(b) Calculer l'aire de cette surface $\mathcal{A}$.

3. Calculer $\displaystyle\iint_{\mathcal{B}} x^2 z \, d\sigma$ où $\mathcal{B}$ est le bord du borné fermé de l'espace défini par les relations

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad z \in [0, 1].$$

II. Formules de Gauss, Green et Stokes

1. **Formule de Green dans le plan**
Soit K un borné fermé de $\mathbb{R}^2$ dont le contour $\mathcal{C}$ est une union finie de courbes planes orientées « aire à gauche » et soit $\vec{f} = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert Ω tel que $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$. On a

$$\iint_K (D_x f_2 - D_y f_1) \; dx \; dy = \oint_{\mathcal{C}^+} (f_1 \; dx + f_2 \; dy)$$

Vérifier la formule de Green pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y) = \left(x^2 + y^2, x^2 - y^2\right)$ et la surface bornée fermée

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 1 \leq y \leq 2 - x^2\right\}.$$

Représenter $\mathcal{A}$.

2. **Formule de Gauss (ou théorème de la divergence)**
Soit V un borné fermé de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière $\mathcal{S}$ est une union finie de surfaces orientables et soit $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur Ω tel que $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a

$$\iint_V \operatorname{div}\left(\vec{f}\right) \; dx \; dy \; dz = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n} \; d\sigma,$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire extérieure à la surface.

Vérifier le théorème de la divergence pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y, z) = (4x, 3z, 5y)$ et la surface $\mathcal{S}$ du cône (portion de cône)

$$\left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0, 2]\right\}.$$

3. **Formule de Stokes**
Soit $\mathcal{S}^+$ une union finie de surfaces régulières orientées dont la frontière est la courbe fermée $\mathcal{C}^+$ composée d'une union finie de courbes régulières et orientées de manière à respecter la règle du tire-bouchon par rapport à l'orientation de $\mathcal{S}^+$.
Soit également $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur Ω tel que $\mathcal{S} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a

$$\iint_{\mathcal{S}^+} \vec{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right) \cdot \vec{n} \; d\sigma = \oint_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \cdot \vec{t} \; ds = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1 \; dx + f_2 \; dy + f_3 \; dz,$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire à $\mathcal{S}^+$ et $\vec{t}$ le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}^+$.

Soit la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y, z) = \alpha\left(l^4 z^2, -3l^4 xy, x^3 y^3\right)$ où $l > 0$ est une longeur et $\alpha > 0$ donne à $\vec{f}$ les dimensions d'une force et soit la surface $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = l, \; x^2 + y^2 \leq 4l^2\right\}$ orientée de sorte que sa normale soit dirigée dans le sens de l'axe Z.

(a) Vérifier la formule de Stokes dans le cas de $\vec{f}$ et $\mathcal{S}$.
(b) Soit la surface $\mathcal{S}' = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z \geq l, \; x^2 + y^2 = l(5l - z)\right\}$ orientée de sorte que sa normale soit dirigée dans le sens de l'axe Z. Représenter $\mathcal{S}'$ dans un repère orthonormé.
(c) Déduire des deux points précédents le flux de $\vec{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right)$ au travers de $\mathcal{S}'$, donné par

$$\iint_{\mathcal{S}'} \vec{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right) \cdot \vec{n} \; d\sigma.$$

III. Divers

1. Un dispositif d'éclairage est muni d'un élément réflecteur dont la forme est obtenue par rotation de la branche de parabole $y = \sqrt{z}$ ($y \in [0,1]$) autour de l'axe OZ. Déterminer l'aire du réflecteur.

2. La température T en un point d'une boule métallique est proportionnelle au carré de la distance au centre de la boule. Calculez le taux de transmission de chaleur à travers une sphère $\mathcal{S}$ de rayon R centrée au centre de la boule.
   (Sugg. : utiliser ($\star$))

3. Un champ magnétique est donné par

$$\vec{B} = \left(5x + \sin(y^2 z)\right)\vec{e}_1 + (\arctan(xz) + 4y)\,\vec{e}_2 + (\cos(xy) - 6z)\,\vec{e}_3$$

   Calculer le flux de ce champ magnétique au travers de la surface fermée $\mathcal{S}$ correspondant au bord d'un cube d'arête égale à 2 centré à l'origine. (Sugg. : remplacer l'intégrale de surface par une autre)

4. La formule de Green, stipulant que

$$\iint_K D_x f_2 - D_y f_1 \; dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1 dx + f_2 dy$$

   où K est un borné fermé du plan, $\mathcal{C}^+$ son bord orienté « aire à gauche » et $\vec{f} = (f_1, f_2)$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert contenant K, peut être utilisée pour déterminer l'aire d'une surface plane : en effet, en prenant $f_2 = x$ et $f_1 = 0$ (resp. $f_1 = -y$ et $f_2 = 0$), on obtient

$$\iint_K dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} x\,dy \qquad \left(\text{resp. } \iint_K dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} -y\,dy\right).$$

   Utiliser ce fait pour calculer l'aire d'une ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$).

5. Un champ électrique est donné par

$$\vec{B} = \left(e^x + 2y + \sin(x^2 z)\right)\vec{e}_1 + (12x + \arctan(yz))\,\vec{e}_2 + \cos(xyz)\vec{e}_3$$

   Calculer la circulation de ce champ électrique le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.
   (Sugg. : remplacer l'intégrale curviligne par une autre)