1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales : partim B'

Complément pour les physiciens

Exercices supplémentaires

Christophe Dozot

Version 13 mai 2017

Chapitre 1

Algèbre linéaire

I Exercices résolus

1. ***Soit l'opérateur***

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que cet opérateur est linéaire.
Solution
Il l'est vu la linéarité des opérations matricielles :
$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -(y_1+y_2) \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} \\ \qquad = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ \\ T\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\lambda y_1 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

(b) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
Solution
L'opérateur T est représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Vérifier que les vecteurs

$$\vec{e'}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \qquad \vec{e'}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

constituent une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.
Solution
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est de dimension deux et ces vecteurs sont linéairement indépendants puisque

$$\det(\vec{e'}_1\ \vec{e'}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Donc, les vecteurs $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ constituent bien une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

(d) Déterminer la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Solution
La matrice de changement de base est donnée par $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base $\mathcal{B}'$.
Solution
Dans la base $\mathcal{B}'$, l'opérateur T est représenté par la matrice $A' = S^{-1}AS$. Comme $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, T est donc représenté par la matrice

$$A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2$ formant une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle T est représenté par une matrice diagonale.
Solution
Pour ce faire, il est nécessaire et suffisant de diagonaliser la matrice A. Les valeurs propres de A étant $-i$ et i, toutes deux simples, A est diagonalisable : cette matrice admet les vecteurs propres linéairement indépendants $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$, de sorte que, pour $S' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}$, on a $S'^{-1}AS' = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.
Dès lors, S' est la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et la base $\mathcal{B}''$ formée des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2$ de composantes respectives (dans $\mathcal{B}$) $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$, c'est-à-dire des vecteurs

$$\vec{e''}_1 = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2 \qquad , \qquad \vec{e''}_2 = -\vec{e}_1 + i\vec{e}_2,$$

dans laquelle l'opérateur T est représenté par la matrice diagonale $S'^{-1}AS' = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

II Exercices supplémentaires

III Solutions des exercices supplémentaires

Chapitre 2

Equations différentielles

I Exercices résolus

1. ***Résoudre l'équation différentielle suivante :***

$$D^3f(x) - 9Df(x) = \sin(x).$$

Solution.
Il s'agit d'une EDLCC non homogène d'ordre 3.
Le polynôme caractéristique associé est $\chi(z) = z^3 - 9z = z(z-3)(z+3)$ et s'annule en 0, -3 et 3 (tous trois zéro de multiplicité 1). Dès lors, la solution générale de l'équation homogène associée s'écrit

$$f_H(x) = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes complexes arbitraires.
Comme le terme indépendant $g : x \mapsto \sin(x)$ est continu sur $\mathbb{R}$, cherchons une solution particulière de l'EDLCC de départ sur $\mathbb{R}$.
Puisque $g(x) = \Im(e^{ix})$, cherchons d'abord une solution particulière de

$$D^3F(x) - 9DF(x) = e^{ix}. \qquad (\bigstar)$$

Le terme indépendant de cette dernière équation étant une exponentielle-polynôme, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient i de l'argument n'est pas zéro du polynôme caractéristique χ, une solution particulière s'écrit $F_P(x) = Ae^{ix}$ où A est une constante à déterminer. On a

$$DF_P(x) = Aie^{ix}, \qquad D^2F_P(x) = -Ae^{ix} \qquad \text{et} \qquad D^3F_P(x) = -Aie^{ix}$$

de sorte que

$$F_P \text{ est solution de } (\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad D^3F_P(x) - 9DF_P(x) = e^{ix} \quad \Leftrightarrow \quad -Aie^{ix} - 9Aie^{ix} = e^{ix} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{i}{10}.$$

Ainsi, une solution particulière de l'EDLCC de départ est donnée par

$$f_P(x) = \Im\left(F_P(x)\right) = \Im\left(\frac{i}{10}e^{ix}\right) = \Im\left(\frac{i}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x)\right) = \frac{1}{10}\cos(x).$$

Finalement, la solution générale de l'EDLCC de départ est

$$f(x) = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3e^{3x} + \frac{1}{10}\cos(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes complexes arbitraires.

2. ***Résoudre l'équation différentielle suivante sur*** $]1,+\infty[$ ***:***

$$x^2D^2u + xDu - u = \frac{2x}{x-1}.$$

Solution.
Il s'agit d'une ED linéaire (à coefficients non constants) non homogène d'ordre 2 d'Euler. Effectuons donc le changement de variables $x = e^t$ ($\Leftrightarrow t = \ln(x)$) entre $]1,+\infty[$ et $]0,+\infty[$, puisque

$$x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) > \ln(1) \quad \Leftrightarrow \quad t > 0,$$

et posons $F(t) = u(e^t),\ t > 0$. Il vient alors d'une part

$$D_tF(t) = D_t\left(u(e^t)\right) = D_xu(e^t)D_t(e^t) = e^t(D_xu)(e^t) = xD_xu(x),$$

ce qui entraîne que

$$\boxed{xDu = DF},$$

et d'autre part

$$D_t^2F(t) = D_t(D_tF(t)) = D_t(e^t(D_xu)(e^t)) = e^t(D_xu)(e^t) + (e^t)^2D_x^2u(e^t) = x(D_xu)(x) + x^2D_x^2u(x)$$

ce qui montre que

$$\boxed{x^2D^2u = D^2F - DF}.$$

Il s'ensuit qu'après changement de variable, l'équation devient

$$D^2F(t) - F(t) = \frac{2e^t}{e^t-1}, \quad \text{sur}]0,+\infty[.$$

Il s'agit d'une EDLCC non homogène d'ordre 2.
Le polynôme caractéristique associé est $\chi(z) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$ et s'annule en -1 et 1 (tous deux zéro de multiplicité 1). Dès lors, la solution générale de l'équation homogène associée s'écrit

$$F_H(t) = C_1e^{-t} + C_2e^t, \qquad t \in]0,+\infty[$$

où C_1, C_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Comme le terme indépendant $g\ :\ t \mapsto \frac{2e^t}{e^t-1}$ est continu sur $]0,+\infty[$, il existe bien une solution particulière de l'EDLCC sur $]0,+\infty[$. Utilisons la méthode de variation des constantes pour en déterminer une. Résolvons d'abord le système

$$\left\{\begin{array}{l} C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^t = 0 \\ -C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^t = \dfrac{2e^t}{e^t-1} \end{array}\right. .$$

En additionnant et en soustrayant les deux équations, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} 2C_2(t)e^t = \dfrac{2e^t}{e^t-1} \\ 2C_1(t)e^{-t} = \dfrac{-2e^t}{e^t-1} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} C_1(t) = \dfrac{-e^{2t}}{e^t-1} \\ C_2(t) = \dfrac{1}{e^t-1} \end{array}\right. .$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \int C_1(t)\,dt &= -\int \frac{e^{2t}}{e^t-1}\,dt \simeq -\int \frac{y}{y-1}\,dy\bigg|_{y=e^t} \simeq -\int \frac{y-1+1}{y-1}\,dy\bigg|_{y=e^t} \\ &\simeq -\int 1 + \frac{1}{y-1}\,dy\bigg|_{y=e^t} \simeq -\left[y + \ln(y-1)\right]_{y=e^t} \\ &\simeq -e^t - \ln(e^t-1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int C_2(t)\,dt &= \int \frac{1}{e^t-1}\,dt \simeq \int \frac{1}{e^t-1}\,\frac{e^t}{e^t}\,dt \\
&\simeq \int \frac{1}{y(y-1)}\,dy\bigg|_{y=e^t} \simeq \int \frac{1-y+y}{y(y-1)}\,dy\bigg|_{y=e^t} \\
&\simeq \left[-\ln(y)+\ln(y-1)\right]_{y=e^t} \\
&\simeq \ln(e^t-1)-t
\end{aligned}$$

de sorte qu'une solution particulière de l'EDLCC est donnée par

$$\begin{aligned}
F_P(x) &= \left(\int C_1(t)\,dt\right)e^{-t} + \left(\int C_2(t)\,dt\right)e^t \\
&= \left(-e^t-\ln(e^t-1)\right)e^{-t} + \left(\ln(e^t-1)-t\right)e^t \\
&= -1+\ln(e^t-1)\left(e^t-e^{-t}\right)-te^t
\end{aligned}$$

et la solution générale par

$$F(t) = F_H(t)+F_P(t) = C_1e^{-t}+C_2e^t+\ln(e^t-1)\left(e^t-e^{-t}\right)-te^t-1, \qquad t>0,$$

où C_1, C_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Finalement, la solution générale de l'équation d'Euler de départ s'obtient en repassant à la variable de départ et est donc donnée par

$$\begin{aligned}
u(x) &= F(\ln(x)) \\
&= \frac{C_1}{x}+C_2x+\left(x-\frac{1}{x}\right)\ln(x-1)-x\ln(x)-1, \qquad x>1,
\end{aligned}$$

où C_1, C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

3. ***Résoudre le système différentiel suivant :***

$$\left\{\begin{array}{l} Df(x) = \operatorname{tg}(x)f(x)+\cos(x) \\ f(0)=1 \end{array}\right. .$$

Solution.
Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1, à second membre linéaire : elle se réécrit

$$Df(x) = a(x)\,f(x)+b(x)$$

où les fonctions $a : x \mapsto \operatorname{tg}(x)$ et $b : x \mapsto \cos(x)$ sont respectivement continues sur

$$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \;:\; k\in\mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}.$$

Comme on dispose d'une condition initiale en $x_0=1$, l'équation admet une solution unique sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$. On a

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \operatorname{tg}(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \simeq -\int \frac{1}{t}\,dt\bigg|_{t=\cos(x)} \simeq -\ln(\cos(x)), \qquad x\in I$$

et

$$P(x) = \int b(x)e^{-A(x)}\,dx = \int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int 1+\cos(2x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin(2x)}{2}\right)$$

de sorte que les solutions sur I sont les fonctions de la forme

$$f(x) = (C + P(x))e^{A(x)} = \frac{1}{2\cos(x)}\left(2C + x + \frac{\sin(2x)}{2}\right), \qquad x \in I,$$

où C est une constante complexe arbitraire. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $C = 1$ et que, par conséquent, la solution cherchée est

$$f(x) = \frac{1}{4\cos(x)}\,(2x + \sin(2x) + 4)\,, \qquad x \in I = \left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[.$$

4. ***Résoudre l'équation différentielle suivante :***

$$Du = \frac{e^{2u} - u\cos(xu)}{x\cos(xu) - 2xe^{2u} - 2u}.$$

Solution.
Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 qui se réécrit

$$x\cos(xu)Du - 2xe^{2u}Du - 2uDu - e^{2u} + u\cos(xu) = 0.$$

En remarquant que

$$x\cos(xu(x))Du(x) + u(x)\cos(xu(x)) = \cos(xu(x))(xDu(x) + u(x)) = \cos(xu(x))D(xu(x)) = D(\sin(xu(x))),$$

que

$$-2xe^{2u(x)}Du(x) - e^{2u(x)} = -[xD(e^{2u(x)}) + e^{2u(x)}D(x)] = D(-xe^{2u(x)}),$$

et que

$$2u(x)Du(x) = D(u^2(x)),$$

on constate que cette équation est exacte et peut se réécrire

$$D\left(\sin(xu(x)) - xe^{2u(x)} + u^2(x)\right) = 0$$

et, en primitivant une fois, on obtient

$$\sin(xu(x)) - xe^{2u(x)} + u^2(x) = C$$

où C est une constante complexe arbitraire.
Notons enfin que cette dernière relation définit implicitement [1] la fonction inconnue « u », ce qui suffit !

5. ***Résoudre le système différentiel suivant :***

$$\left\{\begin{array}{l} xu(1+x^2)Du = u^2 + 1 \\ u(1) = 1 \end{array}\right. .$$

Solution.
Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 1, à second membre séparé : elle se réécrit

$$Du(x) = G\left(u(x)\right).g(x)$$

où

1. Dans le cadre des équations exactes, il n'est pas toujours possible d'obtenir une définition explicite de la fonction inconnue « u », c.-à-d. sous la forme « $u = \ldots$ ».

– $G : y \mapsto \frac{y^2+1}{y}$ est continu sur $\mathbb{R}_0 =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$,
– $g : x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$ est continu sur $\mathbb{R}_0 =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Analyse

Supposons que I soit un intervalle ouvert contenant 1, que $u \in C_1(I)$ et ne s'annule pas dans I. Puisque $G(u)$ ne s'annule pas dans I, on a alors

$$\int \frac{Du(x)}{G(u(x))}dx = \int \frac{u(x)}{u(x)^2+1}Du(x)dx \simeq \int \frac{u}{u^2+1}du \simeq \frac{1}{2}\int D\left(\ln(u^2+1)\right)dx \simeq \frac{1}{2}\ln(u^2(x)+1), \qquad x \in I.$$

Si en plus u vérifie l'équation différentielle, alors on a

$$\int \frac{Du(x)}{G(u(x))}\,dx = \int g(x)\,dx = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$$

Décomposons g en fractions simples : il existe des constantes uniques $A, B, C \in \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (A+B)x^2 + Cx + A \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{array}\right.$$

de sorte que

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx \simeq \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx \simeq \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \simeq \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right), \qquad \forall x \in I.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{1}{2}\ln(u^2(x)+1) = \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C$$

Comme $u(1) = 1$, on en déduit que $C = \ln(2)$ et donc que

$$\frac{1}{2}\ln(u^2(x)+1) = \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{u^2(x)+1} = \frac{2|x|}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \forall x \in I.$$

Cette dernière relation définit implicitement la fonction inconnue u, mais on peut en avoir une définition explicite [2] en allant un peu plus loin : en effet,

$$\sqrt{u^2(x)+1} = \frac{2|x|}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Leftrightarrow \quad u^2(x)+1 = \frac{4x^2}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad u^2(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = \sqrt{\frac{3x^2-1}{x^2+1}}$$

en supposant que $x \in I \cap \left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$.

Synthèse

On vérifie directement que $u(x) = \sqrt{\frac{3x^2-1}{x^2+1}}$, $x \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$, vérifie l'équation différentielle et les conditions imposées.

Remarque

Si on suppose $u(1) = 1$, $1 \in I$ et $u \in C_0(I)$, il existe toujours un intervalle ouvert contenant 1 dans lequel f ne s'annule pas.

2. Tout comme pour les équations exactes, ce n'est pas toujours possible de déterminer explicitement une solution d'une équation à second membre séparé.

6. ***Résoudre l'équation différentielle suivante :***

$$x + u - (x-u)Du = 0.$$

Solution.
Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 qui se réécrit

$$Du = \frac{x+u}{x-u} \qquad \text{ou encore} \qquad Du = \frac{1+\frac{u}{x}}{1-\frac{u}{x}} = f\left(\frac{u}{x}\right).$$

Elle est donc à second membre homogène.
Posons dès lors

$$\boxed{y(x) = \frac{u(x)}{x}}.$$

Il vient alors

$$Du(x) = D(xy(x)) = y(x) + xDy(x)$$

ce qui permet de réécrire l'équation sous la forme

$$y(x) + xDy(x) = \frac{1+y}{1-y} \qquad \text{ou encore} \quad Dy(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+y^2}{1-y}$$

qui est une équation à second membre séparé $Dy = G(y)g(x)$ où
– $G : y \mapsto \frac{1+y^2}{1-y}$ est continu sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,
– $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continu sur $\mathbb{R}_0$.

Analyse

Supposons que I soit un intervalle ouvert tel que $y \in C_1(I)$ et que $y \neq 1$ sur I. Il est clair que $G(y) \neq 0$ sur I et on a

$$\int \frac{Dy(x)}{G(y(x))} dx \simeq \int \frac{1-y}{1+y^2} dy \simeq \int \frac{1}{1+y^2} dy - \int \frac{y}{1+y^2} dy \simeq \operatorname{arctg}(y(x)) - \frac{1}{2}\ln(1+y^2(x)), \qquad x \in I.$$

Si de plus y vérifie l'équation différentielle, alors on a

$$\int \frac{Du(x)}{G(u(x))}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx \simeq \ln|x|, \qquad x \in I,$$

de sorte qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\operatorname{arctg}(y(x)) - \frac{1}{2}\ln(1+y^2(x)) = \ln|x| + C, \qquad x \in I.$$

Dès lors, toute solution u de l'équation de départ est définie implicitement par

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{u(x)}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2\right) = \ln|x| + C, \qquad x \in I,$$

ou encore

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{u(x)}{x}\right) - \ln\left(\sqrt{x^2+u^2(x)}\right) = C, \qquad x \in I,$$

où C est une constante réelle arbitraire.

II Exercices supplémentaires

II.1 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle sur lequel on travaille (f est une fonction de la variable réelle x).

1. $D^3 f(x) - 4Df(x) = xe^{2x} + x^2$
2. $D^3 f(x) - 4Df(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$
3. $D^3 f(x) - f(x) = \cos(x)$
4. $\sin(x)D^2 f(x) + \sin(x)f(x) = 1$
   (Sugg. : diviser les deux membres par $\sin(x)$)

II.2 Equations d'Euler

Résoudre les équations différentielles suivantes (f et u sont des fonctions de la variable réelle $x > 0$).

1. $x^2 D^2 u(x) - 3xDu(x) + 4u(x) = x^3 \quad \text{sur }]0, +\infty[$
2. $(x+1)^2 D^2 f(x) + (x+1)Df(x) + f(x) = x^2 + 2\sin(\ln(1+x)) \quad \text{sur }]-1, +\infty[$
   (Sugg. : poser $x + 1 = e^t$)

II.3 Equations à second membre linéaire

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle sur lequel on travaille (f et u sont des fonctions de la variable réelle x).

1. $Du(x) + x^2 u(x) = x^2$, $u(0) = 2$
2. $xD^2 u(x) + Du(x) = 0$, sur $]0, +\infty[$
   (Sugg. : considérer $Du(x) = f(x)$, résoudre l'équation d'ordre 1 en f puis déterminer u en primitivant f.)
3. $\left(1 + x^2\right) Df(x) + xf(x) = \sqrt{1+x^2}$
4. $\left(1 - x^2\right) Df(x) + (1+x^2)f(x) = e^x$, $f(0) = \dfrac{1}{2}$
5. $(e^x + 1)\, Du(x) - u(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$, $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$

II.4 Equations exactes

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille (f et u sont des fonctions de la variable réelle x).

1. $x^2 D^2 f(x) - xDf(x) = 2x^4 e^{-x^2}$ (Sugg. : diviser les deux membres par x^3)
2. $xuDu + u^2 + x^2 = 0$ (Sugg. : multiplier les deux membres par $2x$)
3. $xDu + u = u^3$ (Sugg. : diviser les deux membres par u^3)

II.5 Equations à second membre séparé

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille (y et u sont des fonctions de la variable réelle x).

1. $u(x)Du(x) = 4x\sqrt{u^2(x) + 1}$, $u(0) = 1$
2. $Du(x) = u^2(x) - 4$
3. $\left(2 + \sin^2(x)\right) Du(x) = \sin(2x)\cos^2(u(x))$

II.6 Equations à second membre homogène

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille (f et u sont des fonctions de la variable réelle x).

1. $Df(x) = \dfrac{f(x)}{x} + \dfrac{f^2(x)}{x^3}$
2.
3.

II.7 Equations différentielles en vrac

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille (f, y et u sont des fonctions de la variable réelle x).

1. $2x\cos(x)Du(x) + (2\cos(x) - x\sin(x))\,u(x) = 0$
2. $x\cos(x)Du(x) + (\cos(x) - x\sin(x))\,u(x) = 0$
3. $x^2D^2y(x) - 3xDy(x) + 4y(x) = x\ln(x), \quad \text{sur }]0, +\infty[$
4. $\left(1 + x^2\right) Df(x) + \dfrac{x^2 - 1}{x} f(x) = -2, \quad \text{sur }]0, +\infty[$
5. $Df(x) = f^2(x) + 1$
6. $xDf(x) = \ln(x)f^2(x) + \ln(ex) - 1\ , \quad \text{sur }]0, +\infty[$
7. $(1 - x)Dy(x) + xy(x) = x, \quad \text{sur }] - \infty, 1[$

II.8 Problèmes

1. Un flotteur plongé dans l'eau subit son propre poids et la poussée d'Archimède (égale au poids de liquide déplacé). Si la section A du flotteur est constante, la hauteur immergée $z(t)$ du flotteur varie selon
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - \rho Agz$$
où m est la masse du flotteur, g l'accélération de pesanteur et ρ la masse volumique de l'eau. Déterminer le comportement du flotteur lorsqu'on le dépose sans vitesse juste à la surface du liquide.

2. On considère un circuit électrique composé d'une force électromotrice V constante, d'une résistance R et d'une self inductance L placées en série. A l'instant initial, le circuit n'est parcouru par aucun courant. on a
$$L\frac{di}{dt} + Ri = V.$$
(a) Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant à tout instant t.
(b) Déterminer son comportement à long terme (c'est-à-dire pour t tendant vers l'infini).

3. Si on tient compte des pertes de mémoire, le taux de mémorisation d'un cours est donné par
$$\frac{dA(t)}{dt} = \alpha\,(M - A(t)) - \beta A(t)$$
où α et β sont des constantes positives, où $A(t)$ désigne la quantité de matière mémorisée et où M désigne la quantité de matière totale à mémoriser.
(a) Déterminer la quantité de matière mémorisée à tout instant t.
(b) Déterminer la quantité de matière mémorisée à long terme.
(c) Déterminer la quantité de matière mémorisée à tout instant t si, initialement, rien n'a été mémorisé.

4. La forme prise par une corde à sauter mise en rotation par deux enfants placés aux deux extrémités de la corde et synchronisant leurs mouvements est donnée par

$$\frac{d}{dx}\left[T(x)\frac{dy}{dx}\right] + \rho\omega^2 y(x) = 0 \quad , \quad y(0) = y(l) = 0$$

où ρ désigne la masse par unité de longueur et $T(x)$ la tension dans la corde.
Déterminer les vitesses ω critiques et les formes $y(x)$ associées pour lesquelles la rotation de la corde est possible si la tension T dans la corde est supposée constante.
(Sugg. : il faut trouver les formes y non identiquement nulles [3].)

5. Soit la réaction chimique $A + B \to C$.
A l'instant initial $t = 0$ sont présentes a moles du corps A, b moles du corps B et aucune mole du corps C. En posant $x(t)$ le nombre de moles du corps C présentes à l'instant t, on suppose que la vitesse d'apparition de C suit la loi

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

où k est une constante positive.
Déterminer la concentration x de C à tout instant t, ainsi que la concentration de C à long terme, dans le cas où
(a) initialement, les corps A et B sont présents en même quantité ;
(b) initialement, le corps A est présent en plus grande quantité que le corps B.

6. Si un médicament est administré en continu via une perfusion, la concentration $x(t)$ de ce médicament dans le sang est gouvernée par l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha - \beta x(t)$$

où α et β sont des constantes positives.
(a) Déterminer la concentration $x(t)$ à tout instant t.
(b) Déterminer vers quoi tend cette concentration à long terme.
(c) Déterminer la concentration à tout instant t si le moment initial ($t = 0$) correspond au moment où le médicament commence à être administré.

7. La distribution de la température $T(r)$ dans la région comprise entre deux sphères concentriques de rayons $r = a$ et $r = b$ ($a < b$) est gouvernée par la loi

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + 2\frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{où} \quad T(a) = T_0,\ T(b) = T_1.$$

Déterminer $T(r)$.

8. La croissance d'une tumeur peut être décrite par l'équation

$$Dx(t) = rx(t) - \beta x^2(t)$$

où $x(t)$ désigne la taille (en cm^3) de la tumeur à tout instant t et où r et β sont des constantes positives.
Déterminer l'évolution de la taille d'une tumeur qui a une taille initiale de 1 cm^3.

3. Le cas particulier $y = 0$ correspond au cas où la corde est tendue horizontalement et ne tourne donc pas.

III Solutions des exercices supplémentaires

III.1 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Les solutions générales des EDLCC sont données par

1. $f(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \dfrac{e^{2x}}{32}\left(2x^2 - 3x\right) - \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x}{8}, \quad x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = C_1 + \left(C_2 - \dfrac{1}{8}\text{arctg}\left(e^x\right)\right) e^{-2x} + \left(C_3 - \dfrac{1}{8}\text{arctg}\left(e^x\right)\right) e^{2x} - \dfrac{3}{8}e^x + \dfrac{1}{8}e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$ (A vérifier !)
3. $f(x) = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_3 \sin\left(\sqrt{3}x\right)\right) - \dfrac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right), \quad x \in \mathbb{R}$ (A vérifier !)
4. $f(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \cos(x) \ln\left(\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ (A verifier ! !)

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes réelles (ou complexes) arbitraires.

III.2 Equations d'Euler

Les solutions générales sont données par

1. $u(x) = x^2(C_1 + C_2 \ln(x)) + x^3, \quad x \in \,]0, +\infty[$
2. $f(x) = C_1 \cos(\ln(x+1)) + C_2 \sin(\ln(x+1)) + \dfrac{(x+1)^2}{5} - x - \ln(x+1)\cos(\ln(x+1)), \quad x \in \,]-1, +\infty[$

où C_1, C_2 sont des constantes réelles (ou complexes) arbitraires.

III.3 Equations à second membre linéaire

Les solutions générales sont données par

1. $u(x) = 1 + C \exp\left(-\dfrac{x^3}{3}\right), \quad x \in \mathbb{R}$ (A vérifier !)
2. $C_1 \ln(x) + C_2, \quad x \in]0, +\infty[$ (A vérifier !)
3. $f(x) = \dfrac{x + C}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}\left(1 + C(x-1)\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (A vérifier !) ;
   l'unique solution est $f(x) = \dfrac{e^x}{2}, \quad x \in \,]-1, 1[$
5. $f(x) = (C + \text{arctg}(x))\,\dfrac{e^x}{1 + e^x}$ (A vérifier !) ;
   l'unique solution est $f(x) = \left(\text{arctg}(x) + \dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{e^x}{1 + e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$

où C est une constante réelle (ou complexe) arbitraire.

III.4 Equations exactes

Les solutions générales sont données par

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2, \quad x \in \mathbb{R}$
2. $x^2 u^2(x) + \dfrac{x^4}{2} = C$
3. $u^2(x)(Cx^2 + 1) = 1$;
   elle admet aussi la solution singulière $u = 0$ sur $\mathbb{R}$

où C, C_1, C_2 sont des constantes réelles.

III.5 Equations à second membre séparé

Les solutions générales sont données par

1. $\sqrt{u^2(x)+1} = 2x^2 + C$ (A vérifier !)
2. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u(x)-2}{u(x)+2}\right| = x + C$; (A vérifier !)
   elle admet aussi les solutions singulières $u = -2$ et $u = 2$ sur $\mathbb{R}$
3. $\mathrm{tg}(u(x)) = \ln\left(2+\sin^2(x)\right) + C$; (A vérifier !)
   elle admet aussi les solutions singulières $u_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R}$

où C est une constante réelle arbitraire.

III.6 Equations à second membre homogène

Les solutions générales sont données par

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+Cx}$;
   elle admet aussi la solution singulière $f = 0$ sur $\mathbb{R}_0$;
2.
3.

où C est une constante réelle.

III.7 Equations différentielles en vrac

Les solutions générales sont données par

1. $x^2\cos(x)u^2(x) = C, \quad x \in \mathbb{R}_0 \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ (A vérifier !)
2. $x\cos(x)u(x) = C, \quad x \in \mathbb{R}_0 \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ (A vérifier !)
3. $y(x) = x^2(C_1 + C_2\ln(x)) + (2+\ln(x))x, \quad x \in]0,+\infty[$ (A vérifier !)
4. $f(x) = \dfrac{Cx - 2x\ln(x)}{1+x^2}, \quad x \in]0,+\infty[$ (A vérifier !)
5. $f(x) = \mathrm{tg}(x+C)$ (A vérifier !)
6. $\mathrm{arctg}(f(x)) = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C, \quad x \in]0,+\infty[$ (A vérifier !)
7. $y(x) = 1 + C(1-x)e^x, \quad x \in]-\infty,1[$ (A vérifier !)

où C, C_1, C_2 sont des constantes réelles arbitraires.

III.8 Problèmes

1. La hauteur immergée du flotteur est donnée par

$$z(t) = \frac{m}{\rho A}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{\rho A g}{m}}\, t\right)\right), \quad t \geq 0.$$

2. (a) L'intensité du courant à tout instant t est donnée par

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad t \geq 0.$$

(b) A long terme, l'intensité du courant tend vers $\dfrac{V}{R}$.

3. (a) La quantité de matière mémorisée à tout instant t est donnée par

$$A(t) = \frac{\alpha M}{\alpha+\beta} + Ce^{-(\alpha+\beta)t}, \quad t \geq 0$$

où C est une constante réelle arbitraire.

(b) A long terme, la quantité de matière mémorisée tend vers $\dfrac{\alpha M}{\alpha+\beta}$.

(c) Dans ce cas, la quantité de matière mémorisée est donnée par

$$A(t) = \frac{\alpha M}{\alpha+\beta}\left(1 - e^{-(\alpha+\beta)t}\right), \quad t \geq 0.$$

4. La rotation de la corde est permise pour les vitesses critiques

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

qui correspondent aux déformations[4]

$$y_k(x) = C\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad x \in [0, l] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

où C est une constante réelle arbitraire.

5. (a) Dans le cas où $a = b$, la concentration de C à tout instant t est donnée par

$$x(t) = \frac{a^2kt}{1+akt}, \quad t \geq 0$$

de sorte qu'à long terme, la concentration de C tend vers $a = b$.

(b) Dans le cas où $a > b$, la concentration de C à tout instant t est donnée par

$$x(t) = \frac{ab\left(1 - e^{k(b-a)t}\right)}{a - be^{k(b-a)t}}, \quad t \geq 0$$

de sorte qu'à long terme, la concentration de C tend vers b.

6. (a) La concentration du médicament à tout instant t est donnée par

$$x(t) = Ce^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta}, \quad t \geq 0$$

où C est une constante réelle arbitraire.

(b) A long terme, cette concentration tend vers $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

(c) Puisque $x(0) = 0$, la concentration est dans ce cas donnée par

$$x(t) = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right), \quad t \geq 0.$$

4. En pratique, c'est le premier mode ($k = 1$) qui apparait !

7. La distribution de la température est donnée par

$$T(r) = \frac{T_0 - T_1}{b-a}\frac{ab}{r} + \frac{T_1 b - T_0 a}{b-a}, \quad r \in [a,b] \quad (0 < a < b).$$

8. L'équation régissant l'évolution de la tumeur est à second membre séparé : elle admet la solution générale

$$x(t) = \frac{Ce^{rt}}{1+\frac{\beta}{r}Ce^{rt}}, \quad t \geq 0$$

où C est une constante réelle arbitraire, ainsi que les solutions singulières

$$x(t) = 0, \quad t \geq 0 \qquad \text{et} \qquad x(t) = \frac{r}{\beta}, \quad t \geq 0.$$

Tenant compte de la condition initiale $x(0) = 1$, on conclut directement que la solution $x = 0$ (pour laquelle $x(0) = 0 \neq 1$) est à rejeter et que la constante C doit vérifier

$$1 = \frac{C}{1+\frac{\beta}{r}C} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{1-\frac{\beta}{r}}.$$

Par conséquent, la taille (en cm^3) de la tumeur à tout instant t est donnée par

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{rt}}{1+\frac{\beta}{r}(e^{rt}-1)} & \text{si } \frac{r}{\beta} \neq 1 \\[2ex] \dfrac{r}{\beta} & \text{si } \frac{r}{\beta} = 1 \end{cases}, \quad t \geq 0.$$

IV Exercices d'examens antérieurs

1. (05/16) ***Déterminer explicitement*** f ***et*** I***, intervalle ouvert de*** $\mathbb{R}$ ***contenant*** 1***, tels que*** $f \in C_1(I)$***,*** $f(x) \neq 0$ ***quel que soit*** $x \in I$ ***,*** $f(1) = 1$ ***et*** f ***est solution de l'équation différentielle***
$$Df(x) = \frac{f^2(x)}{x}.$$

Solution.
Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 1, à second membre séparé : elle se réécrit
$$Df(x) = G\left(f(x)\right).g(x)$$
où $G : y \mapsto y^2$ est continu sur $\mathbb{R}$ et où $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continu sur $\mathbb{R}_0$.

Analyse
Supposons que I soit un intervalle ouvert contenant 1, que $f \in C_1(I)$ et ne s'annule pas dans I. On a alors
$$\int \frac{Df(x)}{f^2(x)}\, dx = -\int D\left(\frac{1}{f(x)}\right)\, dx \simeq \frac{-1}{f(x)}\ , \qquad x \in I.$$
Si en plus f vérifie l'équation différentielle, alors on a
$$\int \frac{Df(x)}{f^2(x)}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx \simeq \ln(x)\ , \qquad \forall x \in I \cap]0, +\infty[= J.$$
Il existe donc $C \in \mathbb{C}$ tel que
$$\frac{-1}{f(x)} = \ln(x) + C\ , \qquad \forall x \in J.$$
Comme $f(1) = 1$, on en déduit que $C = -1$ donc
$$\frac{1}{f(x)} = 1 - \ln(x)\ , \qquad \forall x \in J.$$
Cette égalité implique que $e \notin J$, donc finalement,
$$f(x) = \frac{1}{1 - \ln(x)}\ , \qquad \forall x \in J \subset]0, e[.$$

Synthèse
On vérifie directement que $\boxed{f(x) = \frac{1}{1 - \ln(x)}\ ,\ x \in]0, e[,}$ vérifie l'équation différentielle et la condition imposée.

Remarque
Si on suppose $f(1) = 1$, $1 \in I$ et $f \in C_0(I)$, il existe toujours un intervalle ouvert contenant 1 dans lequel f ne s'annule pas.

2. (08/16) ***Déterminer explicitement*** f ***et*** I***, intervalle ouvert de*** $\mathbb{R}$ ***contenant*** 0***, tels que*** $f \in C_1(I)$***,*** $f(0) = 1$ ***et*** f ***est solution de l'équation différentielle***
$$(1 + x^2)Df(x) - 2xf(x) = 0.$$

Solution.
Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1, à second membre linéaire : elle se réécrit
$$Df(x) = a(x)\ f(x)$$

où $a : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est continu sur $\mathbb{R}$.
Dès lors, l'équation admet une solution sur $\mathbb{R}$ et, comme nous disposons d'une condition initiale en $0 \in \mathbb{R}$, nous pouvons en déterminer une solution unique sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.
Nous avons

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \simeq \ln(1+x^2), \qquad x \in I$$

Les solutions sur I sont donc les fonctions de la forme

$$f(x) = Ce^{A(x)} = C(1+x^2), \qquad x \in I,$$

où C est une constante arbitraire. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $C = 1$ et que, par conséquent, la solution cherchée est

$$\boxed{f(x) = x^2 + 1, \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Chapitre 3

Intégrales paramétriques

I Rappels théoriques

Soit une fonction définie par

$$I \;:\; \lambda \in \Lambda \mapsto \int_A f(x,\lambda)\,dx$$

où

- A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (souvent un intervalle),
- Λ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$,
- f est une fonction définie sur le produit cartésien $A \times \Lambda$ telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x,\lambda)$ est intégrable sur A.

Théorème de dérivation des intégrales paramétriques
Si

- pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x,\lambda)$ est intégrable sur A,
- pour tout $x \in A$, la fonction $\lambda \mapsto f(x,\lambda)$ est continûment dérivable sur Λ,
- pour tout borné fermé K inclus dans Λ, il existe une fonction g_K intégrable sur A telle que

$$|D_\lambda f(x,\lambda)| \le g_K(x) \qquad \forall x \in A, \forall \lambda \in K,$$

alors la fonction $I \;:\; \lambda \in \Lambda \mapsto \int_A f(x,\lambda)\,dx$ est continûment dérivable sur Λ et

$$D_\lambda I(\lambda) = D_\lambda \left(\int_A f(x,\lambda)\,dx \right) = \int_A D_\lambda f(x,\lambda)\,dx \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

II Exercice résolu

Sachant que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \forall a > 0,$$

calculer

$$\int_0^{+\infty} \cos(bx)e^{-ax^2}\,dx \qquad \forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R}.$$

Solution.
Montrons tout d'abord l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto f(x,a,b) = \cos(bx)e^{-ax^2}$ sur $A =]0,+\infty[$ quels que soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
Fixons $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et notons que

$$|f(x,a,b)| \le e^{-ax^2} \quad \forall x \in A \qquad \text{puisque} \quad |\cos(bx)| \le 1\ \forall x \in A.$$

La fonction $x \mapsto e^{-ax^2}$ étant continue sur A et la limite

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-ax^2} = 0$$

étant finie puisque l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste, on conclut par le critère d'intégrabilité en θ (avec $\theta = 2 > 1$) que cette fonction est intégrable sur A. Dès lors, par le critère de comparaison, on conclut que $x \mapsto f(x,a,b) = \cos(bx)e^{-ax^2}$ est aussi intégrable sur A.

Passons au calcul de l'intégrale.
Fixons encore $a > 0$, considérons $b \in \mathbb{R} = \Lambda$ comme paramètre et vérifions si les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales paramétriques sont vérifiées pour

$$I \ : \ b \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(bx)e^{-ax^2}\, dx.$$

Il vient que

- pour tout $b \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x,a,b)$ est intégrable sur A (vu ce qui précède),
- pour tout $x \in A$, la fonction $b \mapsto f(x,a,b)$ est continûment dérivable sur Λ,
- pour tout borné fermé $K = [\alpha, \beta]$ inclus dans Λ, on a

  $$|D_b f(x,a,b)| = \left|-x\sin(bx)e^{-ax^2}\right| \leq xe^{-ax^2} \qquad \forall x \in A, \forall b \in K,$$

  où la fonction $g_K \ : \ x \mapsto xe^{-ax^2}$ est intégrable sur A quel que soit $a > 0$ (cela se démontre de la même manière que l'intégrabilité de $x \mapsto f(x,a,b)$ sur A).

Par conséquent, le théorème est applicable : I est continûment dérivable sur $\Lambda = \mathbb{R}$ et

$$DI(b) = D_b\left(\int_0^{+\infty} \cos(bx)e^{-ax^2}\, dx\right) = \int_0^{+\infty} D_b\left(\cos(bx)e^{-ax^2}\right)\, dx = -\int_0^{+\infty} x\sin(bx)e^{-ax^2}\, dx$$

$\forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R}$. De là, une intégration par parties conduit à

$$DI(b) = \frac{1}{2a}\left(\left[\sin(bx)e^{-ax^2}\right]_0^{+\infty} - b\int_0^{+\infty} \cos(bx)e^{-ax^2}\, dx\right) = -\frac{b}{2a}I(b)$$

puisque

$$\begin{cases} 0 \leq \left|\sin(bx)e^{-ax^2}\right| \leq e^{-ax^2} \\ \lim_{x\to+\infty} e^{-ax^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sin(bx)e^{-ax^2} = 0 \qquad \text{(Thm de l'étau).}$$

Ainsi, I est continûment dérivable sur $\Lambda = \mathbb{R}$ et satisfait l'équation différentielle à second membre linéaire

$$DI(b) = -\frac{b}{2a}I(b).$$

Comme le coefficient est continu sur $\mathbb{R}$ quel que soit $a > 0$ et qu'une primitive en est $\int -\frac{b}{2a}\, db \simeq -\frac{b^2}{4a}$, la solution générale de cette équation est $I(b) = Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$ où C est une constante réelle. En notant que, pour $b = 0$,

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = C,$$

on conclut finalement que

$$I(b) = \boxed{\int_0^{+\infty} \cos(bx)e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}} \qquad \forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R}.$$

III Exercices supplémentaires

1. Sachant que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^a - x^b}{\ln(x)} = f(x,a,b)$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tous $a, b > 1$, calculer
$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln(x)}\, dx \qquad \forall a, b > 1.$$
2. Sachant que la fonction $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}\, t^x = f(t,x)$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tous $x > -1$ et que
$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\, dt = \ln 2,$$
calculer
$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\, t^x\, dt \qquad \forall x > -1.$$

IV Solutions des exercices supplémentaires

1. L'intégrale vaut $\ln \frac{a+1}{b+1}$ pour tous $a, b > 1$.
2. L'intégrale vaut $\ln \frac{x+2}{x+1}$ pour tout $x > -1$.

Chapitre 4

Analyse vectorielle

I Rappels théoriques (Synthèse)

I.1 Notations

Produits scalaire et vectoriel
Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$; leur *produit vectoriel* est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Fonctions continûment dérivables
On utilisera la notation

$$f : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}^n$$

pour désigner une fonction f continûment dérivable sur Ω.

Notons que, dans le présent rappel, Ω désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^n$, n étant égal à 2 ou 3 selon le contexte.

I.2 Fonctions scalaires, fonctions vectorielles et dérivation

Dans ce qui suit,

– une *fonction scalaire* est une application

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (n = 1,\ 2 \text{ ou } 3).$$

– une *fonction vectorielle* est une application

$$\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n = 1,\ 2 \text{ ou } 3 \ \text{ et } \ m = 2 \text{ ou } 3).$$

Pour $m = 3$, on note $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ où $f_1,\ f_2$ et f_3 sont des fonctions scalaires.
On a

$$D\vec{f} = (Df_1, Df_2, Df_3)$$

et, si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ désignent deux fonctions vectorielles et α une fonction scalaire, toutes dérivables sur un même ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} D\left(\alpha \vec{f}\right) &= D\alpha\ \vec{f} + \alpha\ D\vec{f} \\ D\left(\vec{f} \cdot \vec{g}\right) &= D\vec{f} \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot D\vec{g} \\ D\left(\vec{f} \wedge \vec{g}\right) &= D\vec{f} \wedge \vec{g} + \vec{f} \wedge D\vec{g} \end{aligned}$$

I.3 Gradient, divergence et rotationnel

Soient $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Soient encore $\alpha : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $\vec{f} : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle (Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$).

1. Le *gradient* de α est la fonction vectorielle[1, 2]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}\,(\alpha) = \vec{\nabla}\alpha \ : \ (x,y,z) \in \Omega & \mapsto \ (D_x\alpha,\, D_y\alpha,\, D_z\alpha) \\ & = \ D_x\alpha\,\vec{e_1} + D_y\alpha\,\vec{e_2} + D_z\alpha\,\vec{e_3} \end{aligned}$$

2. La *divergence* de $\vec{f}$ est la fonction scalaire

$$\text{div}\left(\vec{f}\right) \ : \ (x,y,z) \in \Omega \ \mapsto \ D_x f_1 + D_y f_2 + D_z f_3$$

   Par abus de notation, on écrit $\text{div}\left(\vec{f}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}$.

3. Le *rotationnel* de $\vec{f}$ est la fonction vectorielle

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right) \ : \ (x,y,z) \in \Omega & \mapsto \ (D_y f_3 - D_z f_2,\, D_z f_1 - D_x f_3,\, D_x f_2 - D_y f_1)) \\ & = \ (D_y f_3 - D_z f_2)\,\vec{e_1} + (D_z f_1 - D_x f_3)\,\vec{e_2} + (D_x f_2 - D_y f_1)\,\vec{e_3} \end{aligned}$$

   Par abus de notation, on écrit $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$.

I.4 Relations entre le gradient, la divergence et le rotationnel

Rappelons qu'un ouvert Ω est *étoilé par rapport à* $x_0 \in \Omega$ si, pour tout x dans Ω, le segment

$$\{(1-t)x_0 + tx : t \in [0,1]\}$$

est inclus dans Ω.

Un ouvert est dit *étoilé* s'il contient un point x_0 par rapport auquel il est étoilé.

1. Soit $\alpha : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}$ une fonction scalaire. Il vient

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,(\alpha)\right] = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\alpha = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega.$$

   La réciproque est vraie si Ω est un ouvert étoilé :

   Si $\vec{f} : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$ est une fonction vectorielle et si Ω est un ouvert étoilé, alors

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right) = \vec{0} \ \Leftrightarrow \ \exists\, \alpha \ : \ \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R} \ \text{ tel que } \ \vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\alpha) = \vec{\nabla}\alpha.$$

   On dit dans ce cas que $\vec{f}$ *dérive du potentiel scalaire* α.

1. Dans le cadre de ce cours, la flèche symbolisant le caractère vectoriel des expressions $\overrightarrow{\text{grad}}$, $\vec{\nabla}$ ou encore $\overrightarrow{\text{rot}}$ sera régulièrement omise.

2. Dans les lignes qui suivent, la dépendance des diverses dérivées par rapport aux variables x, y et z n'est pas rappelée afin d'alléger le texte et, ce faisant, de le rendre plus lisible.

2. Soit $\vec{f} : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}$ une fonction vectorielle. Il vient

$$\operatorname{div}\left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right)\right] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

   La réciproque est vraie si Ω est un ouvert étoilé :
   Si $\vec{g} : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$ est une fonction vectorielle et si Ω est un ouvert étoilé, alors

$$\operatorname{div}(\vec{g}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists\, \vec{f} \;:\; \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R} \;\text{ tel que }\; \vec{g} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right).$$

   On dit dans ce cas que $\vec{g}$ *dérive du potentiel vectoriel* $\vec{f}$.

3. Enfin, *toute fonction scalaire α de classe C_1 correspond à la divergence d'une fonction vectorielle $\vec{a}$ de classe C_2 :*

$$\forall\, \Omega \subset \mathbb{R}^3,\; \forall\, \alpha : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R},\; \exists\, \vec{a} \;:\; \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}^3 \;\text{ tel que }\; \operatorname{div}(\vec{a}) = \alpha.$$

I.5 Courbes et intégrales associées

Une *courbe* $\mathcal{C}$ est un ensemble de points dont les coordonnées cartésiennes peuvent être décrites par une fonction vectorielle d'une variable réelle.

Cette fonction vectorielle est appelée *paramétrage* ou *chemin* et est la plupart du temps définie sur un intervalle (ou une union d'intervalles).

Nous nous limiterons ici au cas d'un intervalle fermé borné $I = [a, b]$.

$$\begin{array}{rcl} \underline{\text{Chemin}} & : & \vec{\gamma} \;:\; I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \;:\; t \mapsto \vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \\ \underline{\text{Courbe}} & : & \mathcal{C} = \{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \overrightarrow{OP}(t) = \vec{\gamma}(t),\; t \in I\} \end{array}$$

Sous les hypothèses adéquates [3], on a les formules suivantes :

– *Vecteur tangent (unitaire)*

$$\vec{v}(P) = D_t\vec{\gamma}(t) \qquad \left(\vec{t}(P) = \frac{D_t\vec{\gamma}(t)}{\|D_t\vec{\gamma}(t)\|} \right)$$

– *Longueur d'un chemin*

$$L_{\vec{\gamma}} = \int_a^b \|D_t\vec{\gamma}(t)\| \; dt$$

– *Intégrale d'une fonction scalaire sur un chemin*

$$\int_{\vec{\gamma}} g \; ds = \int_a^b g(\vec{\gamma}(t)) \; \|D_t\vec{\gamma}(t)\| \; dt$$

– *Intégrale curviligne d'une fonction vectorielle le long d'un chemin*

$$\int_{\vec{\gamma}} f_1 \; dx + f_2 \; dy + f_3 \; dz = \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \cdot D_t\vec{\gamma}(t) \; dt$$

3. Voir cours théorique.

I.6 Surfaces et intégrales associées

Une *surface* $\mathcal{S}$ est un ensemble de points dont les coordonnées cartésiennes peuvent être décrites par une fonction vectorielle de deux variables réelles.

Cette fonction est appelée *paramétrage* ou *couverture* si elle satisfait la définition ci-dessous.

Couverture : une *couverture* d'une surface $\mathcal{S}$ est la donnée d'un compact K de $\mathbb{R}^2$ et d'une fonction $\vec{\phi}$ de classe C_1 sur un ouvert contenant K telle que :

- ϕ est injective sur $\mathring{K}$ (rappelons que $\mathring{K}$ représente l'intérieur de K) ;
- $\exists\, \vec{\psi} \in C_1(\omega)$ avec $\vec{\phi}(\mathring{K}) \subset \omega$ et telle que $\vec{\psi}\left(\vec{\phi}(u,v)\right) = (u,v)$ pour tout $(u,v) \in \mathring{K}$.[4]

Surface : $\mathcal{S} = \{P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \overrightarrow{OP}(t) = \vec{\phi}(u,v),\ (u,v) \in K\}$

Sous les hypothèses adéquates[5]**,** on a les formules suivantes :

- *Vecteur normal* (*unitaire*)

$$\vec{N}(u,v) = \left(D_u\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}\right)(u,v) \qquad \left(\vec{n}(u,v) = \frac{\left(D_u\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}\right)(u,v)}{\left\|\left(D_u\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}\right)(u,v)\right\|}\right)$$

- *Aire d'une surface*

$$A_{\mathcal{S}} = \iint_K \left\|\left(D_u\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}\right)(u,v)\right\| \, du\, dv.$$

- *Intégrale de g sur $\vec{\phi}$*

$$\iint_{\vec{\phi}} g\, d\sigma = \iint_K g(\vec{\phi}(u,v))\ \|\vec{N}(u,v)\|\, du\, dv$$

I.7 Intégrales remarquables

1. **Formule de Green dans le plan**

   Soit K un borné fermé de $\mathbb{R}^2$ dont le contour $\mathcal{C}$ est une union finie de courbes planes orientées « aire à gauche » et soit $\vec{f} = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert Ω tel que $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$. On a

$$\iint_K (D_x f_2 - D_y f_1)\ dx\ dy = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1\ dx + f_2\ dy$$

2. **Formule de Gauss ou théorème de la divergence**

   Soit V un compact de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière $\mathcal{S}$ est une union finie de surfaces orientables et soit $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3] : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}^3$ tel que $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a

$$\iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{f}\right)\ dx\ dy\ dz = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}\ d\sigma,$$

   où $\vec{n}$ est la normale unitaire extérieure à la surface.

4. En pratique, on vérifiera rarement cette deuxième condition car cette vérification sortirait du cadre du cours.
5. Voir cours théorique.

3. **Formule de Stokes**

Soit $\mathcal{S}^+$ une union finie de surfaces régulières orientées dont la frontière est la courbe fermée $\mathcal{C}^+$ composée d'une union finie de courbes régulières et orientées de manière à respecter la règle du tire-bouchon par rapport à l'orientation de $\mathcal{S}^+$.
Soit également $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur Ω tel que $\mathcal{S} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a

$$\iint_{\mathcal{S}^+} \vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) \cdot \vec{n}\, d\sigma = \oint_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \cdot \vec{t}\, ds = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1\ dx + f_2\ dy + f_3\ dz,$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire à $\mathcal{S}^+$ et $\vec{t}$ le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}^+$.

II Exercices résolus

II.1 Longueur et aire - Astroïde

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ***du plan, on considère l'astroïde d'équation cartésienne***

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

(a) Déterminer un paramétrage du morceau $\mathcal{C}$ ***de cette astroïde situé dans le premier quadrant.***
(b) Déterminer la longueur de $\mathcal{C}$.
(c) Déterminer un paramétrage de la surface $\mathcal{S}$ ***délimitée par*** $\mathcal{C}$ ***et les axes du repère.***
(d) Calculer l'aire de cette surface $\mathcal{S}$.

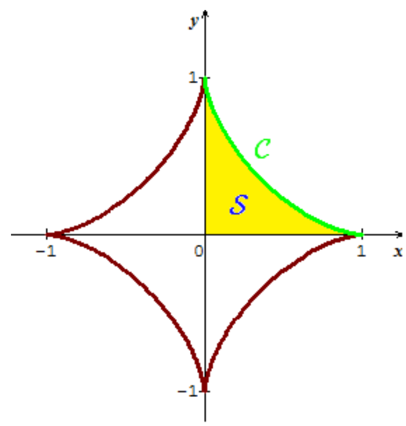

FIGURE 4.1 – Astroïde.

Solution.
(a) Un paramétrage (injectif) de $\mathcal{C}$ est donné par

$$\vec{\gamma} \; : \; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \left(\cos^3(t), \; \sin^3(t)\right).$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t) = \left(-3\cos^2(t)\sin(t), \; 3\sin^2(t)\cos(t)\right) = 3\sin(t)\cos(t)\left(-\cos(t), \; \sin(t)\right) \neq \vec{0} \quad \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D\vec{\gamma}(t)\| = 3\sin(t)\cos(t).$$

(b) Comme cette norme est continue sur le borné fermé $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle y est intégrable et la longueur de $\mathcal{C}$ vaut

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|D\vec{\gamma}(t)\| \, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t) \, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2t) \, dt = \frac{3}{4}\left[-\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

(unités de longueur).

(c) Un paramétrage (injectif) de $\mathcal{S}$ est donné par

$$\vec{\phi} \; : \; (t, u) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1] \mapsto \left(\cos^3(t), \; u\sin^3(t), \; 0\right).$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D_t\vec{\phi}(t, u) = \left(-3\cos^2(t)\sin(t), \; 3u\sin^2(t)\cos(t), \; 0\right) = 3\sin(t)\cos(t)\left(-\cos(t), \; u\sin(t), \; 0\right),$$

et

$$D_u\vec{\phi}(t,u) = \big(0,\ \sin^3(t),\ 0\big)\,,$$

de sorte que

$$D_t\vec{\phi}(t,u) \wedge D_u\vec{\phi}(t,u) = 3\sin(t)\cos(t)\,\big(0,\ 0,\ -\cos(t)\sin^3(t)\big) \neq \vec{0} \qquad \forall (t,u) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times]0,1[,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D_t\vec{\phi}(t,u) \wedge D_u\vec{\phi}(t,u)\| = 3\cos^2(t)\sin^4(t) \qquad \forall (t,u) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times]0,1[.$$

(b) Comme cette norme est continue sur le borné fermé $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,1]$, elle y est intégrable et l'aire de la surface $\mathcal{S}$ vaut donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \|D_t\vec{\phi}(t,u) \wedge D_u\vec{\phi}(t,u)\|\ dudt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sin^4(t)\cos^2(t)\ dudt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2(2t)\,\frac{1}{2}\,(1-\cos(2t))\ dt \\
&= \frac{3}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos(4t))\ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)\cos(2t)\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}\left[\sin^3(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{3\pi}{32}
\end{aligned}$$

(unités d'aire).

II.2 Paramétrage et intégrale sur une courbe

Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathcal{E}} xy\ ds \qquad \textbf{\textit{où}} \qquad \mathcal{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,\ y \geq 0\right\}.$$

Solution.
Un paramétrage (injectif) de $\mathcal{E}$ est donné par

$$\vec{\gamma}\ :\ t \in [0,\pi] \mapsto (2\cos(t),\ \sin(t))\,.$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t) = (-2\sin(t),\ \cos(t)) \neq \vec{0} \quad \forall t \in\ ]0,\pi[\,,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D\vec{\gamma}(t)\| = \sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)} = \sqrt{3\sin^2(t) + 1}.$$

Comme l'intégrand $f\ :\ (x,y) \mapsto xy$ est continu sur la courbe (bornée fermée), l'intégrale a un sens et vaut

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{E}} xy\ ds &= \int_0^{\pi} 2\cos(t)\sin(t)\ \|D\vec{\gamma}(t)\|\ dt = 2\int_0^{\pi} \cos(t)\sin(t)\sqrt{3\sin^2(t)+1}\ dt \\
&= \frac{2}{6}\int_0^{\pi} \frac{2}{3}D\left(\left(3\sin^2(t)+1\right)^{\frac{3}{2}}\right)\ dt \\
&= \frac{2}{9}\left[\left(3\sin^2(t)+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

II.3 Paramétrages et intégrales curvilignes le long d'une courbe

1. ***Dans un repère orthonormé*** $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ***du plan, on considère l'arcade de cycloïde*** $\mathcal{C}$ ***paramétrée par***

$$(t - \sin t,\ 1 - \cos t)\,, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calculer les intégrales suivantes.

$$\textbf{\textit{(a)}} \int_{\mathcal{C}} y^2\, dx \qquad\qquad \textbf{\textit{(b)}} \int_{\mathcal{C}} y^2\, dy$$

Solution.
Le paramétrage de $\mathcal{C}$ donné

$$\vec{\gamma}\ :\ t \in [0, 2\pi] \mapsto (t - \sin t,\ 1 - \cos t)\,.$$

est injectif, et (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$\begin{aligned} D\vec{\gamma}(t) &= (1 - \cos(t),\ \sin(t)) = \left(2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right),\ 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right),\ \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \neq \vec{0} \quad \forall t \in\ ]0, 2\pi[\,, \end{aligned}$$

ce qui montre qu'il est régulier.
Notons de plus que ce paramétrage correspond à l'orientation « aire à droite » par rapport à la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
Comme l'intégrand $f\ : (x, y) \mapsto y^2$ est continu sur la courbe (bornée fermée), les deux intégrales ont un sens et il vient alors que

$$\begin{aligned} (a) \int_{\mathcal{C}} y^2\, dx &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 (1 - \cos(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos(t) + 3\cos^2(t) - \cos^3(t)\right]\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos(t) + \frac{3}{2}(1 + \cos(2t)) - (1 - \sin^2(t))\cos(t)\right]\, dt \\ &= 5\pi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (b) \int_{\mathcal{C}} y^2\, dy &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 \sin(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} D\left((1 - \cos(t))^3\right)\, dt \\ &= \frac{1}{3}\left[(1 - \cos(t))^3\right]_0^{2\pi}\, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour l'orientation considérée.

2. ***Calculer l'intégrale***

$$\int_{\mathcal{D}} (y\, dx - x\, dy) \qquad \textbf{\textit{où}} \qquad \mathcal{D}\ \textbf{\textit{est le segment joignant les points}}\ (0,0)\ \textbf{\textit{et}}\ (1,2).$$

Solution.
Un paramétrage (injectif) de $\mathcal{D}$ est donné par

$$\vec{\gamma}\ :\ t \in [0, 1] \mapsto (t,\ 2t)\,.$$

Ce paramétrage oriente le segment de l'origine $(0,0)$ vers le point $(1,2)$ et est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t) = (1,\ 2) \neq \vec{0} \quad \forall t \in\ ]0,1[\,,$$

ce qui montre qu'il est régulier.
Comme l'intégrand $\vec{f} : (x,y) \mapsto (y,-x)$ est continu sur la courbe (bornée fermée), l'intégrale a un sens et vaut

$$\int_{\mathcal{D}} (y\,dx - x\,dy) = \int_0^1 (2t.1\ - t.2)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$$

pour l'orientation considérée.

II.4 Paramétrage et intégrale sur une surface

Calculer l'intégrale

$$\iint_{\Sigma} \left((x-1)^2 + y^2\right) d\sigma \qquad \textbf{\textit{où}} \qquad \Sigma \ \textit{\textbf{est le disque centré en}}\ (1,0)\ \textit{\textbf{et de rayon}}\ 2.$$

Solution.
Un paramétrage (injectif) de Σ est donné par

$$\vec{\phi} : (r,\theta) \in [0,2] \times [0,2\pi] \mapsto (1 + r\cos(\theta),\ r\sin(\theta),\ 0)\,.$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D_\theta\vec{\phi}(r,\theta) = (-r\sin(\theta),\ r\cos(\theta),\ 0) = r\,(-\sin(\theta),\ \cos(\theta),\ 0)\,,$$

et

$$D_r\vec{\phi}(r,\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta),\ 0)\,,$$

de sorte que

$$D_r\vec{\phi}(r,\theta) \wedge D_\theta\vec{\phi}(r,\theta) = r\,(0,\ 0,\ 1) \neq \vec{0} \qquad \forall (r,\theta) \in\ ]0,2[\times]0,2\pi[\,,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D_r\vec{\phi}(r,\theta) \wedge D_\theta\vec{\phi}(r,\theta)\| = r \qquad \forall (r,\theta) \in\ ]0,2[\times]0,2\pi[\,.$$

Comme l'intégrand $f : (x,y) \mapsto (x-1)^2 + y^2$ est continu sur la surface (bornée fermée), l'intégrale a un sens et vaut

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \left((x-1)^2 + y^2\right)\ d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 f(\vec{\phi}(r,\theta))\ \|D_r\vec{\phi}(r,\theta) \wedge D_\theta\vec{\phi}(r,\theta)\|\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(((1 + r\cos(\theta)) - 1)^2 + (r\sin(\theta))^2\right)\ r\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\ drd\theta \\
&= 8\pi.
\end{aligned}$$

III Exercices supplémentaires

III.1 Courbes - Paramétrages, longueur, intégrales

1. Calculer la longueur de la courbe plane

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 8y^2 = x^2(1-2x^2)\right\}.$$

2. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ du plan, on considère l'arcade de cycloïde $\mathcal{C}$ paramétrée par

$$(t-\sin t,\ 1-\cos t)\,, \quad t \in [0,2\pi].$$

Calculer les intégrales suivantes.

$$\text{(a)} \int_{\mathcal{C}} y\, ds \qquad\qquad \text{(b)} \int_{\mathcal{C}} y\, dx$$

III.2 Surfaces - Paramétrages, aire, intégrales

1.

III.3 Formules de Green, Gauss et Stokes

1. Vérifier la formule de Green pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y) = [2x,-y]$ et la surface $\mathcal{B}$ bornée du plan dont les points ont une ordonnée positive et délimitée par le cercle centré à l'origine et de rayon 1 et les droites d'équations cartésiennes $x=y$ et $x=-y$.
2. Calculer l'intégrale suivante en appliquant la formule de Green :

$$\int_{\mathcal{C}} -x^2y dx + xy^2 dy$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle centré à l'origine et de rayon R (on considère l'orientation « aire à gauche »).

3. Vérifier le théorème de la divergence (formule de Gauss) pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z) = \left(x^2+y^2, xy, z^2+1\right)$ et le borné fermé V du premier octant $(x,y,z \geq 0)$ limité par le plan $z=2y$ et le cylindre d'équation $x^2+y^2=9$.
4. Vérifier la formule de Stokes dans le cas de la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z) = [y^2,x^2,-x+z]$ et du triangle de sommets de coordonnées $(0,0,1), (1,0,1)$ et $(1,1,1)$.
5. Vérifier la formule de Stokes dans le cas de la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z) = \left(x^2y, 0, xyz\right)$ et de la surface composée de la portion du cylindre $x^2+y^2=4$ limitée par les plans $z=0$ et $z=2$ et l'ensemble

$$\left\{(x,y,2) : x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

III.4 Problèmes

1. On désire commercialiser un nouveau vide-pomme de section carrée de côté $2l$.On étudie la trace laissée par ce vide-pomme dans une pomme supposée parfaitement sphérique de rayon R lorsque le vide-pomme est parfaitement aligné sur le centre de la pomme (cf. FIG. 4.2 ci-dessous). On suppose que $R > \sqrt{2}l$, c'est-à-dire que « le vide-pomme est plus petit que la pomme ».

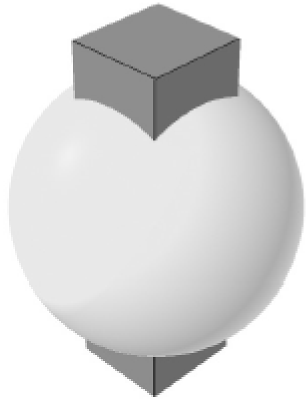

Figure 4.2 – Pomme traversée par le vide-pomme

(a) Calculer le périmètre de la découpe laissée par le vide-pomme de part et d'autre de la pomme.
(b) Si le rayon de la pomme mesure $\frac{3}{2}\sqrt{7}$ centimètres et que le côté de la section carrée du vide-pomme mesure $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ centimètres, calculer le périmètre de la découpe laissée par le vide-pomme de part et d'autre de la pomme.
(c) Donner une expression intégrale de la surface totale de la peau de la pomme ôtée par le vide-pomme.

2.

IV Solutions des exercices supplémentaires

IV.1 Courbes - Paramétrages, longueur, intégrales

1. La longueur de la courbe Γ vaut π (unités de longueur).
2. Les valeurs des intégrales sont

$$\text{(a)} \int_{\mathcal{C}} y\, ds = \frac{32}{3} \qquad\qquad \text{(b)} \int_{\mathcal{C}} y\, dx = 3\pi.$$

IV.2 Surfaces - Paramétrages, aire, intégrales

1.

IV.3 Formules de Green, Gauss et Stokes

1. Les intégrales des deux membres de la formule de Green sont nuls.
2. L'application de la formule de Green au calcul de l'intégrale demandée conduit à la valeur $\frac{\pi R^4}{2}$.
3. Les intégrales des deux membres de la formule de Gauss ont pour valeur $\frac{81(\pi+3)}{4}$.
4. Les intégrales des deux membres de la formule de Stokes ont pour valeur $\frac{1}{3}$.
5. Les intégrales des deux membres de la formule de Stokes ont pour valeur -4π.

IV.4 Problèmes

1. (a) Un paramétrage injectif et continûment dérivable de cette découpe est donné par

$$\vec{\gamma}\ :\ y \in [0, l] \mapsto \left(l, y, \sqrt{R^2 - l^2 - y^2}\right)$$

Le périmètre de la découpe laissée par le vide-pomme est donné par

$$8\sqrt{R^2 - l^2}\, \arcsin\left(\frac{l}{\sqrt{R^2 - l^2}}\right).$$

(b) Dans ces conditions, ce périmètre vaut 8π centimètres.

(c) La surface $\mathcal{S}$ de la peau de la pomme située dans le premier octant $(x, y, z \geq 0)$ est paramétrée par

$$\vec{\Phi}\ :\ (x, y) \in [0, l] \times [0, l] \mapsto \left(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)$$

qui est injectif et continûment dérivable sur $[0, l] \times [0, l]$. Vu la symétrie, l'aire totale de la peau ôtée par le vide-pomme est donnée par

$$8 \iint_{\mathcal{S}} d\sigma = 8 \int_0^l \int_0^l \|D_x\vec{\Phi} \wedge D_y\vec{\Phi}\|\, dx\, dy = 8R \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

(unités d'aires).

2.

V Exercices d'examens antérieurs

1. (05/16) **Dans un repère orthonormé du plan, on donne l'ellipse d'équation cartésienne**

$$9x^2 + y^2 = 9.$$

Si $\mathcal{C}$ désigne la partie de cette courbe qui se trouve dans le second quadrant, calculer les intégrales suivantes

$$(1) \int_{\mathcal{C}} xy\ ds, \qquad (2) \int_{\mathcal{C}} y\ dy, \qquad (3) \int_{\mathcal{C}} x\ dy.$$

Solution. L'équation cartésienne de l'ellipse se réécrivant, sous forme canonique, $x^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$, un paramétrage (injectif) de la courbe $\mathcal{C}$ est donné par

$$\vec{\gamma}\ :\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \mapsto (\cos(t),\ 3\sin(t))\,.$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t) = (-\sin(t),\ 3\cos(t)) \neq \vec{0} \quad \forall t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D\vec{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + 9\cos^2(t)} = \sqrt{1 + 8\cos^2(t)}.$$

(1) Comme l'intégrant $f : (x, y) \mapsto xy$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} xy\ ds &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t)\, 3\sin(t)\, \sqrt{1 + 8\cos^2(t)}\ dt = -\frac{3}{16} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} D\left(1 + 8\cos^2(t)\right)\ \sqrt{1 + 8\cos^2(t)}\ dt \\ &= -\frac{3}{16}.\frac{2}{3}\left[\left(1 + 8\cos^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{13}{4}. \end{aligned}$$

(2) Comme l'intégrant $f : (x, y) \mapsto y$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3\sin(t)\, 3\cos(t)\ dt = \frac{9}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2t)\ dt = \frac{9}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{9}{2}.$$

(3) Comme l'intégrant $f : (x, y) \mapsto x$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}} x\ dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t)\, 3\cos(t)\ dt = 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2t)\right)\ dt = \frac{3}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3\pi}{4}.$$

2. (08/16) **Dans un repère orthonormé du plan, on donne l'ellipse d'équation cartésienne**

$$x^2 + 16y^2 = 16.$$

Si $\mathcal{C}$ désigne la partie de cette courbe qui se trouve dans le quatrième quadrant, calculer les intégrales suivantes

$$(1) \int_{\mathcal{C}} xy\ ds, \qquad (2) \int_{\mathcal{C}} xy\ dx, \qquad (3) \int_{\mathcal{C}} xy\ dy.$$

Solution. L'équation cartésienne de l'ellipse se réécrivant, sous forme canonique, $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + y^2 = 1$, un paramétrage (injectif) de la courbe $\mathcal{C}$ est donné par

$$\vec{\gamma} \,:\, t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \mapsto (4\cos(t),\ \sin(t))\,.$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t) = (-4\sin(t),\ \cos(t)) \neq \vec{0} \quad \forall t \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D\vec{\gamma}(t)\| = \sqrt{16\sin^2(t) + \cos^2(t)} = \sqrt{1 + 15\sin^2(t)}.$$

(1) Comme l'intégrant $f : (x, y) \mapsto xy$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} xy\, ds &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 4\cos(t)\ \sin(t)\ \sqrt{1 + 15\sin^2(t)}\, dt = \frac{4}{30}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} D\left(1 + 15\sin^2(t)\right)\ \sqrt{1 + 15\sin^2(t)}\, dt \\ &= \frac{4}{30}\left[\frac{2}{3}\left(1 + 15\sin^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\frac{28}{5}.\end{aligned}$$

(2) Comme l'intégrant $f : (x, y) \mapsto xy$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}} xy\, dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 4\cos(t)\sin(t)\,(-4\sin(t))\, dt = -16\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t)\, dt = -16\left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\frac{16}{3}.$$

(3) Comme l'intégrant $f : (x, y) \mapsto xy$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}} xy\, dy = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 4\cos(t)\sin(t)\ \cos(t)\, dt = 4\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t)\, dt = 4\left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\frac{4}{3}.$$

Table des matières