



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématique et physique : 1er bloc

Test du 20-09-16

Correction

Problèmes élémentaires

Rédiger une solution des problèmes simples suivants.

Mathématique :

1) Chez l'Homme, les "globules rouges immatures" sont des cellules nucléées mais dès qu'elles arrivent à maturité et entrent dans la circulation sanguine, elles deviennent normalement anucléées. Il arrive cependant qu'une proportion de globules rouges nucléés soit trouvée lors d'une analyse sanguine ; on décèle ainsi des symptômes d'anomalies qui peuvent se révéler graves ; on considère ici que le seuil critique est atteint lorsqu'en moyenne on trouve 125 cellules nucléées parmi mille cellules.

Si une goutte de sang de la grosseur d'une tête d'épingle contient (approximativement) cinq millions de globules rouges et si l'analyse révèle la présence de huit cent mille noyaux, le seuil critique est-il atteint ? Pourquoi ?

Solution. La proportion de globules rouges nucléés dans la goutte de sang est

$$\frac{800000}{5000000} = \frac{160}{1000}.$$

Or, le seuil critique est atteint à partir d'une proportion de globules rouges nucléés égale à $\frac{125}{1000}$. Comme $\frac{160}{1000} > \frac{125}{1000}$, le seuil critique est atteint.

2) On mélange 150 ml d'une solution ayant une concentration d'éthanol de 20% avec 1 dl d'une solution ayant une concentration d'éthanol de 25%. On ajoute ensuite $\frac{1}{4}$ l d'eau pure. Quelle est la concentration d'éthanol du mélange ?

Solution. Initialement, dans les 150 ml, c'est-à-dire 15 cl, de la première solution, on a $\frac{20}{100} \cdot 15 = 3$ cl d'éthanol.

Dans la solution ajoutée de 1 dl, c'est-à-dire de 10 cl, on a $\frac{25}{100} \cdot 10 = 2,5$ cl d'éthanol.

Par conséquent, dans le mélange de $15 + 10 = 25$ cl, il y a $3 + 2,5 = 5,5$ cl d'éthanol, ce qui correspond à une concentration de $5,5 \cdot \frac{100}{25} = 5,5 \cdot 4 = 22$ %.

Si on ajoute $\frac{1}{4}$ l d'eau pure, c'est-à-dire de 25 cl, on a une solution de $25 + 25 = 50$ cl qui contient 5,5 cl d'éthanol. Par conséquent, la concentration d'éthanol du mélange final est donc de $5,5 \cdot \frac{100}{50} = 5,5 \cdot 2 = 11$ %.

Physique :

3) L'accélération de la pesanteur étant considérée comme égale à 10 m/s^2 , quelle vitesse initiale dirigée verticalement vers le haut doit-on donner à une pierre pour qu'elle atteigne une hauteur de 18 m avant de redescendre ?

Solution. Considérons comme position initiale l'endroit où la pierre est lancée. Soit v_0 sa vitesse initiale. L'accélération est considérée comme égale à -10 m/s^2 .

La vitesse est exprimée par

$$v(t) = -10t + v_0$$

et la distance totale parcourue par

$$e(t) = -\frac{10}{2}t^2 + v_0t + e_0 = -5t^2 + v_0t.$$

Au moment où la pierre atteint la hauteur de 18 m, sa vitesse est nulle ; elle est donc caractérisée par la relation $-10t + v_0 = 0$ et on a $t = \frac{v_0}{10}$.

Puisque la pierre parcourt 18 m durant $\frac{v_0}{10}$ secondes, on a $e\left(\frac{v_0}{10}\right) = -5\frac{v_0^2}{100} + \frac{v_0^2}{10} = 18$ ou encore $v_0^2 = 360$.

Comme l'espace parcouru est exprimé par une valeur positive, on a $v_0 = 6\sqrt{10}$.

La vitesse initiale de la pierre doit donc être de $6\sqrt{10} \text{ m/s}$.

Transcodage

1. Exprimer en français la propriété ci-dessous (**ATTENTION : ne pas se limiter à une lecture de symboles. Par exemple, on exprime « $a + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ » par « la somme de deux réels » et non « a plus b avec a, b appartenant à \mathbb{R} ») :**

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Solution. Le carré de la différence de deux réels vaut la somme des carrés de chacun de ces réels diminuée du double produit de ces réels.

2. Exprimer en symboles mathématiques la phrase entre guillemets :
« La mesure du travail d'une force constante en direction, sens et norme dont le point d'application subit un déplacement est égale au produit scalaire des vecteurs force et déplacement. »

Solution. Soient \vec{F} la force donnée, \vec{d} le déplacement donné et T la mesure du travail correspondant. On a

$$T = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Techniques de calcul

1. Résoudre (x est une inconnue réelle)

$$(a) \frac{x}{3} = \frac{3x-1}{2} - \frac{1}{24} \quad (b) x^2 + 2x = 4x^2 - 2 \quad (c) 1 - x \leq \frac{2}{2-x}.$$

Solution.

1. (a) On a

$$\frac{x}{3} = \frac{3x-1}{2} - \frac{1}{24} \Leftrightarrow \frac{8x}{24} = \frac{36x-12-1}{24} \Leftrightarrow 13 = 28x \Leftrightarrow x = \frac{13}{28}.$$

Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{ \frac{13}{28} \right\}$.

(b) L'équation donnée est équivalente à $3x^2 - 2x - 2 = 0$. Comme son discriminant (ou réalisant) vaut

$$\Delta = (-2)^2 - 4.3.(-2) = 28, \text{ les solutions sont } \frac{2-2\sqrt{7}}{6} = \frac{1-\sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2+2\sqrt{7}}{6} = \frac{1+\sqrt{7}}{3}.$$

Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{ \frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right\}$.

(c) Si $x \neq 2$, l'inéquation donnée est équivalente à $\frac{x^2 - 3x + 2 - 2}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x}{2-x} \leq 0$.

En étudiant le signe du premier membre, on a $x \in [0, 2[$ ou $x \in [3, +\infty[$.

Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = [0, 2[\cup [3, +\infty[$.

2. Résoudre (x est une inconnue réelle) $\sin(x) \cos(x) + \frac{1}{2} = 0$.
Donner les solutions qui appartiennent à $[\pi, 3\pi]$.

Solution. Puisque $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, l'équation donnée est équivalente à $\sin(2x) = -1$ qui a pour solutions

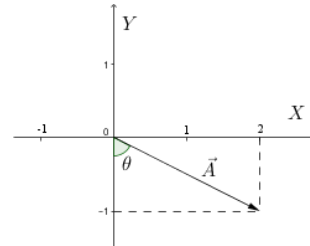
$$2x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions dans $[\pi, 3\pi]$ est alors $S = \left\{ \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4} \right\}$.

Représentation graphique

1. Soit un objet de 2 kg pouvant se déplacer sans frottement sur une surface horizontale, symbolisée par la feuille. Deux forces lui sont appliquées en même temps, une vers la droite de 4 N et une de 2 N vers le bas (cf. les directions définies par les axes du dessin). L'accélération qu'il subit alors est représentée par le vecteur \vec{A} sur le graphique, dont les axes sont gradués en m/s^2 . Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Les corriger si elles sont fausses.

- (1) La norme de l'accélération vaut $3 m/s^2$.
- (2) La composante selon X de l'accélération est donnée par $\|\vec{A}\| \cos(\theta)$.
- (3) Les composantes du vecteur \vec{A} sont $(-1, 2)$.
- (4) La valeur de $\text{tg}(\theta)$ est $\frac{1}{2}$.



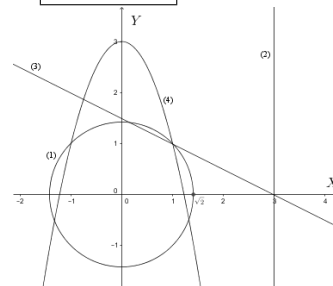
Solution. On a

- (1) La norme de l'accélération vaut $3 m/s^2$ est FAUX car elle vaut $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} m/s^2$.
- (2) La composante selon X de l'accélération est donnée par $\|\vec{A}\| \cos(\theta)$ est FAUX car elle est donnée par $\|\vec{A}\| \sin(\theta)$.
- (3) Les composantes du vecteur \vec{A} sont $(-1, 2)$ est FAUX ; elles sont $(2, -1)$.
- (4) La valeur de $\text{tg}(\theta)$ est $\frac{1}{2}$ est FAUX ; elle vaut 2.

2. Dans un même repère orthonormé, représenter avec précision les courbes dont voici les équations en accompagnant le graphique du numéro de l'équation.

- (1) $x^2 + y^2 - 2 = 0$
- (2) $x - 3 = 0$
- (3) $2y + x - 3 = 0$
- (4) $2x^2 + y - 3 = 0$

Solution.



QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède.

- 1. Si on multiplie par deux la longueur de l'arête d'un cube, alors
 - l'aire d'une face du cube est multipliée par 2
 - le volume du cube est multiplié par 6
 - le périmètre d'une face du cube est multiplié par 4
 - une donnée est manquante
 - aucune des propositions précédentes n'est correcte
- 2. En fin de période de soldes, un magasin annonce 20% de réduction sur le prix déjà soldé à 30%. La réduction totale par rapport au prix de départ est donc
 - de 36%
 - de 44%
 - de 50%
 - de 56%
 - aucune des propositions précédentes n'est correcte

3. Un enfant a déjà colorié quatre septièmes de son dessin. Sa maman s'amuse en coloriant également cinq sixièmes de la partie non coloriée du dessin. Au total, quelle est la part non coloriée du dessin ?

- $1/14$ $5/14$ $17/42$ $25/42$ aucune des propositions précédentes n'est correcte

4. La vitesse de propagation d'une onde dans une corde tendue est donnée par $v = \sqrt{\frac{T}{m}}$, où T désigne la tension de cette corde et m sa masse par unité de longueur.

A masse constante, si cette vitesse de propagation est doublée, comment varie la tension de cette corde ?

- Elle doit être divisée par $\sqrt{2}$ Elle doit être multipliée par $\sqrt{2}$
 Elle doit être divisée par 2 Elle doit être multipliée par 2
 Aucune des propositions précédentes n'est correcte

5. Le graphique ci-contre représente la position x en fonction du temps t d'un mobile qui se déplace de manière rectiligne. Si b et c sont deux constantes réelles strictement positives, laquelle des expressions données décrit le mieux l'accélération a du mobile ?

- $a(t) = 0$ $a(t) = b$ $a(t) = -c$
 $a(t) = b + ct$ $a(t) = b - ct$

