Exercices préliminaires (« test »)

---

1. Pour quelles valeurs du réel non nul a les séries suivantes convergent-elles ?

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m\ a^m}{1+m^2}, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m\ m^a}{1+m^2}$$

2. Pour quelles valeurs des réels r, s la fonction $x \mapsto x^s(1-x)^r$ est-elle de carré intégrable sur $]0,1[$ (resp. n'est-elle pas de carré intégrable sur $]0,1]$) ?
3. Soient les fonctions f et g définies explicitement sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x \qquad g(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}(x)$$

Montrer que le produit de composition de ces fonctions est défini sur $\mathbb{R}$ et en déterminer l'expression.

4. On considère la fonction f défine sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{1+ix}$$

A quels espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ appartient-elle. Quelle est la norme de g dans ces espaces ?

5. Pour tout $a > 0$, déterminer la transformée de Fourier de la fonction f_a définie par $f_a(x) = e^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)\ (x^2+b^2)}dx$$

quels que soient $a, b > 0$.

6. On définit la fonction I par

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a}dx, \qquad a > 0.$$

En utilisant le théorème de dérivation des intégrales paramétriques pour dériver I, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a)^2}dx \ = \ \frac{\pi}{4a^{3/2}}, \qquad a > 0.$$