Liste 1 – Fonctions test, distributions, supports et dérivation

---

Exercice 1 (Critère d'annulation pp). Soient Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Démontrer que $f = 0$ presque partout dans Ω si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,[1].$$

Exercice 2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Examiner la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des suites suivantes ($m \in \mathbb{N}_0$) :

(a) $\varphi_m(x) = \frac{\varphi(x)}{m}$

(b) $\varphi_m(x) = \frac{\varphi(\frac{x}{m})}{m}$

(c) $\varphi_m(x) = m\varphi(mx)$

(d) $\varphi_m(x) = m\varphi(\frac{x}{m})$

(e) $\varphi_m(x) = \frac{\varphi(mx)}{m}$.

Exercice 3. Parmi les applications suivantes, quelles sont celles qui définissent des distributions ?

(a) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (D\varphi)(1)$

(b) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (\varphi(0))^2$

(c) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(0) + (D\varphi)(1)$

(d) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx$

(e) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 |\varphi(x)|dx$

(f) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)$

(g) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n)$

(h) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$

(i) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$

(j) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$

(k) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (D^n\varphi)(0)$

(l) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(0)$

(m) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(n)$

(n) $\varphi \in \mathcal{D}(]0,+\infty[) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (D^n\varphi)\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 4. Simplifier au maximum les expressions suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$(a) \quad e^{2x}\delta_0 + e^x D\delta_0, \qquad\qquad (b) \quad D(\cos(x)\delta_\pi)$$

Exercice 5. On donne $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$, et on considère la distribution u associée à f. Déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de u.

---

1. c'est--dire si et seulement si $u_f = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exercice 6. Si $-1 < \lambda < 0$, montrer que la fonction

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$ et en calculer sa dérivée.

Exercice 7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que la distribution de Dirac dans Ω n'est pas une distribution associée à une fonction localement intégrable sur Ω.

Exercice 8. Montrer qu'il n'existe pas de distribution u dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec la fonction $f : x \mapsto e^{1/x}$ sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire telle que

$$u(\varphi) = \int_0^{+\infty} e^{1/x} \varphi(x) dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[)$.