Liste 1 – Fonctions test, distributions et dérivation

Exercice 1 (Critère d'annulation pp)**.** Soient Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$. Démontrer que $f = 0$ presque partout dans Ω si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\text{ [1]}.$$

Exercice 2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Examiner la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des suites suivantes ($m \in \mathbb{N}_0$) :

$$(a)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(x)}{m} \qquad (b)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(\frac{x}{m})}{m} \qquad (c)\ \varphi_m(x) = m\varphi(mx)$$
$$(d)\ \varphi_m(x) = m\varphi(\tfrac{x}{m}) \quad (e)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(mx)}{m}.$$

Exercice 3. Parmi les applications suivantes, quelles sont celles qui définissent des distributions ?

(a) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto D\varphi(1)$ $\quad(b)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (\varphi(0))^2$ $\quad(c)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(0) + D\varphi(1)$

(d) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx$ $\quad(e)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 |\varphi(x)|dx$ $\quad(f)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)$

(g) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n)$ $\quad(h)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad(i)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$

(j) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad(k)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (D^n\varphi)(0)$ $\quad(l)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(0)$

(m) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(n)$ $\quad(n)$ $\varphi \in \mathcal{D}(]0,+\infty[) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (D^n\varphi)\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 4. Simplifier au maximum les expressions suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$(a)\ e^{2x}\delta_0 + e^x D\delta_0, \qquad (b)\ x^p D^q \delta_0 \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}, \qquad (c)\ D\big(\cos(x)\delta_\pi\big).$$

Exercice 5. On donne $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$, et on considère la distribution u associée à f. Déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de u.

Exercice 6. Si $-1 < \lambda < 0$, montrer que la fonction

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$ et en calculer sa dérivée.

Exercice 7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que la distribution de Dirac dans Ω n'est pas une distribution associée à une fonction localement intégrable sur Ω.

Exercice 8. Montrer qu'il n'existe pas de distribution u dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec $e^{1/x}$ sur $]0,+\infty[$, c'est-à-dire telle que

$$u(\varphi) = \int_0^{+\infty} e^{1/x}\varphi(x)dx \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(]0,+\infty[).$$

---

1. c'est-à-dire si et seulement si $u_f = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.