# Liste 2

1. Déterminer le support des distributions de l'exercice 2 de la liste 1.
2. Déterminer la structure générale des distributions dans $\mathbb{R}$ dont le support est formé de deux points distincts de $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les distributions $u$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les égalités suivantes
$$(a)\ xu = 2u \qquad (b)\ x^2u = u$$
$$(c)\ x^2u = \delta_0 \qquad (d)\ x^2Du = \delta_0.$$
4. Soient $p \in \mathbb{N}_0$ et $c \in \mathbb{C}$. Déterminer les distributions $u$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient
$$(a)\ D^pu = 0 \qquad (b)\ (D-c)^pu = 0.$$ [2]
5. Déterminer les distributions $u$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les égalités suivantes :
$$(a)\ D^2u - 2Du + u = 0 \qquad (b)\ Du + u = \delta_0$$
$$(c)\ D^2u = \delta_0 \qquad (d)\ D^2u + 4u = \delta_0.$$
6. Soient $a$ et $b$ deux complexes fixés. On considère alors l'opérateur différentiel
$$P = D^2 + aD + b.$$
Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $C^2(\mathbb{R})$ telles que $(Pf)(x) = (Pg)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = g(0)$ et $Df(0) - Dg(0) = 1$. On pose
$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si} \quad x \leq 0, \\ -g(x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$
Montrer que $h$ définit une distribution $u$ et calculer $Pu$. En déduire les solutions de l'équation
$$D^2u + 2Du - 3u = \delta_0.$$

2. Suggestion : Montrer que $D^p(e^{-cx}u) = e^{-cx}(D-c)^pu$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.