

**LISTE 2 – SUPPORT DE DISTRIBUTIONS, DISTRIBUTIONS À
SUPPORT PONCTUEL ET ÉQUATIONS DANS $\mathcal{D}'(\Omega)$**

Exercice 1. Déterminer le support des distributions de l'exercice 3 de la liste 1.

Exercice 2. Déterminer la structure générale des distributions dans \mathbb{R} dont le support est formé de deux points distincts de \mathbb{R} .

Exercice 3. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les égalités suivantes :

$$(a) \quad xu = 2u \qquad (b) \quad x^2u = u \qquad (c) \quad x^2u = \delta_0 \qquad (d) \quad x^2Du = \delta_0.$$

Exercice 4. Soient $p \in \mathbb{N}_0$ et $c \in \mathbb{C}$. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(a) \quad D^p u = 0, \qquad (b) \quad (D - c)^p u = 0.$$

Exercice 5. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} (a) \quad D^2u - 2Du + u = 0 & (c) \quad D^2u = \delta_0 \\ (b) \quad Du + u = \delta_0 & (d) \quad xDu + u = \delta_0. \end{array}$$

Exercice 6. Soient a et b deux complexes fixés. On considère alors l'opérateur différentiel

$$P = D^2 + aD + b.$$

Soient f et g deux fonctions de $C^2(\mathbb{R})$ telles que $(Pf)(x) = (Pg)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = g(0)$ et $(Df)(0) - (Dg)(0) = 1$. On pose

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } x \leq 0, \\ -g(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que h définit une distribution u et calculer Pu . En déduire les solutions de l'équation

$$D^2u + 2Du - 3u = \delta_0.$$