Liste 2 – Support de distributions et équations dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Exercice 1. Déterminer le support des distributions de l'exercice 3 de la liste 1.

Exercice 2. Déterminer la structure générale des distributions dans $\mathbb{R}$ dont le support est formé de deux points distincts de $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les égalités suivantes :

$$(a)\ xu = 2u \qquad (b)\ x^2u = u \qquad (c)\ x^2u = \delta_0 \qquad (d)\ x^2Du = \delta_0$$

Exercice 4.

(4.1) Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient $D^pu = 0$.

(4.2) Montrer que $D(fu) = f\,Du + (Df)\,u$ pour tous $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(4.3) Montrer que $D^p(e^{-cx}u) = e^{-cx}(D-c)^pu$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(4.4) Soient $p \in \mathbb{N}_0$ et $c \in \mathbb{C}$. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient $(D-c)^pu = 0$.

Exercice 5. Soit $L(D) = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha D^\alpha$ un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants. La solution la plus générale de l'équation homogène $L(D)(u) = 0$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$u = u_{P_{\alpha_1-1}(x)e^{a_1x}+\ldots+P_{\alpha_m-1}(x)e^{a_mx}}$$

où

1. $a_1, ..., a_m$ sont les zéros distincts du polynôme $L(z) = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha z^\alpha$,
2. pour tout $j \leq m$, α_j est la multiplicité de a_j comme zéro de $L(z)$,
3. pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $P_\alpha(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à α.

Exercice 6. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a)\ D^2u - 2Du + u = 0 \qquad (b)\ Du + u = \delta_0 \qquad (c)\ D^2u = \delta_0 \qquad (d)\ xDu + u = \delta_0$$

Exercice 7. Si a et b sont deux complexes fixés, on considère l'opérateur différentiel

$$P = D^2 + aD + b.$$

Soient f et g deux fonctions de $C^2(\mathbb{R})$ telles que $(Pf)(x) = (Pg)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = g(0)$ et $Df(0) - Dg(0) = 1$. On pose

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si} \quad x \leq 0, \\ -g(x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

(7.1) Montrer que h définit une distribution u et calculer Pu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(7.2) En déduire la solution la plus générale dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation

$$D^2u + 2Du - 3u = \delta_0.$$