Liste 3

---

1. Soient les suites f_m, g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ définies par

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{m} \\ m & \text{si } |x| < \frac{1}{m} \end{cases}$$

et

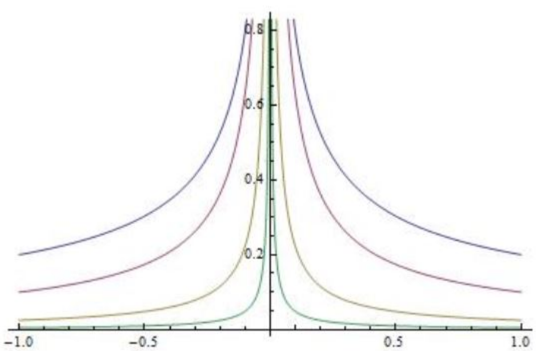
$$g_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{m} \\ m^2 & \text{si } |x| < \frac{1}{m} \end{cases}$$

Montrer que ces suites convergent presque partout vers 0 dans $\mathbb{R}$, que la suite u_{f_m} converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $2\delta_0$ et que la suite u_{g_m} ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Si elles existent, déterminer les limites pour $n \to +\infty$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des distributions suivantes :

(a) $n^2(\delta_{1/n} - 2\delta_0 + \delta_{-1/n})$ (b) $n^3(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n} - 2D\delta_0)$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{2}|x|^{\varepsilon-1}$ $(x \in \mathbb{R})$ et on note u_ε la distribution associée. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, calculer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$.



4. Soit $k \in \mathbb{N}_0$. On considère les suites $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = m^k e^{imx} \quad \text{et} \quad g_m(x) = me^{-m|x|}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Montrer que les suites de distributions $(u_{f_m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $(u_{g_m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer leurs limites.

5. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ la suite définie par

$$f_m(x) = \frac{\sin(mx)}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_0$$

et soit u_m la distribution associée à f_m. Etudier la convergence de cette suite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

6. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n)$, $Ł^\infty(\mathbb{R}^n)$) qui converge vers f dans $L^1\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$). Est-ce que $(u_{f_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers u_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$? Justifier.