Liste 3 – Distributions tempérées et transformation de Fourier

---

Exercice 1. On considère les fonctions définies dans $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = c \ (c \in \mathbb{C}), \quad f_2(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N}_0), \quad f_3(x) = e^x \quad \text{et} \quad f_4(x) = e^{iax} \ (a \in \mathbb{R}).$$

(a) Les distributions associées sont-elles tempérées dans $\mathbb{R}$? Si oui, en calculer la transformée de Fourier.

(b) En déduire que tout polynôme définit une distribution tempérée et en calculer la transformée de Fourier.

Exercice 2. La distribution associée à la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est-elle tempérée sur $\mathbb{R}$? Si oui, en calculer la transformée de Fourier.

Exercice 3. Rappelons que la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction $Y = \chi_{]0;+\infty[}$ est donnée par

$$\mathcal{F}^{\pm} u_Y(\varphi) = \pi\varphi(0) \pm i \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

En déduire l'expression de la transformée de Fourier de la valeur principale de $1/x$.

Exercice 4. On considère les lois

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m\in\mathbb{Z}} m\varphi(m), \quad v : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi m).$$

(a) Montrer directement que u et v sont des distributions tempérées.

(b) Calculer la transformée de Fourier $\mathcal{F}^- u$ de u et montrer que l'on a $\mathcal{F}^- u = 2i\pi Dv$.

Exercice 5. Soient les fonctionnelles définies sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi mx} \varphi(x) \, dx \quad \text{et} \quad \varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(m)$$

notées respectivement

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi mx} \quad \text{et} \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m.$$

(a) Comparer $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi mx}$ et $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m$.

(b) En déduire que l'on a

$$2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{\mp 2\pi m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{\pm} \delta_m$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.