# Liste 4 – Limites de distributions

**Exercice 1.** Soient les suites $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ définies par

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{m} \\ m & \text{si } |x| < \frac{1}{m} \end{cases}$$

et

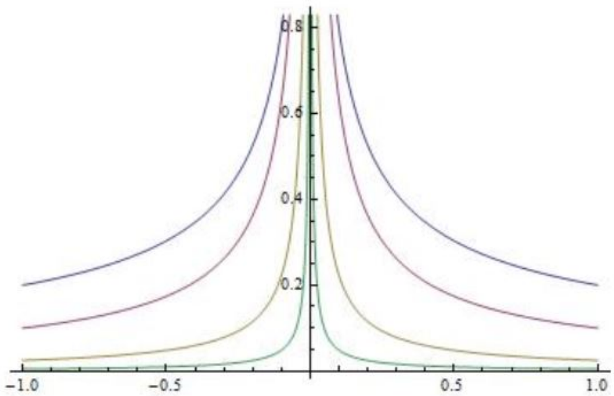
$$g_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{m} \\ m^2 & \text{si } |x| < \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Montrer que ces suites convergent presque partout vers 0 dans $\mathbb{R}$, que la suite $(u_{f_m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $2\delta_0$ et que la suite $(u_{g_m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

**Exercice 2.** Si elles existent, déterminer les limites pour $n \to +\infty$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des distributions suivantes :

$$(a) \quad n^2(\delta_{1/n} - 2\delta_0 + \delta_{-1/n}), \qquad (b) \quad n^3(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n} - 2D\delta_0).$$

**Exercice 3.** Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon}{2}|x|^{\varepsilon-1}$ $(x \in \mathbb{R})$ et on note $u_\varepsilon$ la distribution associée. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, calculer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$.




**Exercice 4.** Soit $k \in \mathbb{N}_0$. On considère les suites $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = m^k e^{imx} \quad \text{et} \quad g_m(x) = me^{-m|x|}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Montrer que les suites de distributions $(u_{f_m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $(u_{g_m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer leurs limites.

**Exercice 5.** Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ la suite définie par

$$f_m(x) = \frac{\sin(mx)}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}_0$$

et soit $u_m$ la distribution associée à $f_m$. Etudier la convergence de cette suite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

**Exercice 6.** Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$) qui converge vers $f$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$). Est-ce que $(u_{f_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $u_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ? Justifier.