

LISTE 5

1. Si cela a un sens, déterminer la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$
2. On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Montrer que la distribution $gD\delta_0$ et la fonction f sont composables et calculer leur produit de composition.
3. Soit une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, positive et d'intégrale égale à 1. On pose $\psi_m(x) = m\psi(mx)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}_0$.
 - (a) Montrer que ψ_m et u sont composables quelle que soit la distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
 - (b) Si u_m est la distribution associée à $u * \psi_m$, montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4. Soient u une distribution tempérée dans \mathbb{R} et a un réel. On considère l'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (u * \varphi)(a).$$

- (a) Montrer que cette application est une distribution.
 - (b) Cette distribution est-elle tempérée ? Pourquoi ?
5. A PROPOSER AUX ETUDIANTS

On donne

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ xe^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On note u la distribution associée à f et P l'opérateur de dérivation $P(D) = D^2 - 2D + 1$.

- (a) Déterminer le plus grand naturel k tel que $f \in C_k(\mathbb{R})$.
- (b) Montrer directement que la loi $\varphi \mapsto u_{(x)}\varphi(x+1)$ est une distribution³ dans \mathbb{R}
- (c) Montrer que Pv est un multiple de δ_1 .

3. Il s'agit en fait de $u * \delta_1$.