

LISTE 5 – PRODUIT DE COMPOSITION

Exercice 1. On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Montrer que la distribution $gD\delta_0$ et la fonction f sont composables et calculer leur produit de composition.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$. Si cela a un sens, calculer $\delta_a * \delta_b$.

Exercice 3. Montrer que les expressions suivantes ont un sens et les comparer :

$$(u_1 * D\delta_0) * u_Y, \quad u_1 * (D\delta_0 * u_Y).$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 4. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, positive et d'intégrale égale à 1. On pose

$$\psi_m(x) = m\psi(mx)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) Montrer que ψ_m et u sont composables quelle que soit la distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(b) Si u_m est la distribution associée à $u * \psi_m$, montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soient u une distribution tempérée dans \mathbb{R} et a un réel. On considère l'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (u * \varphi)(a).$$

(a) Montrer que cette application est une distribution.

(b) Cette distribution est-elle tempérée ? Pourquoi ?

Exercice 6. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ xe^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Si u désigne la distribution associée à f et si P est l'opérateur de dérivation

$$P(D) = D^2 - 2D + 1,$$

calculer la distribution $P(u * u_1)$.