Année académique 2019-2020
Master Maths

1. Fonctions test

— Exercices de base —

***Exercice 1* (Critère d'annulation pp).** Soient Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$. Démontrer que $f = 0$ presque partout dans Ω si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,^1.$$

***Exercice 2*.** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Examiner la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des suites suivantes ($m \in \mathbb{N}_0$) :

$$(a)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(x)}{m} \qquad (b)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(\frac{x}{m})}{m} \qquad (c)\ \varphi_m(x) = m\varphi(mx)$$

$$(d)\ \varphi_m(x) = m\varphi(\tfrac{x}{m}) \quad (e)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(mx)}{m}.$$

***Exercice 3*.** Soit $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{2^m}\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2/m^2}\right) \text{ si } |x| < m, \text{ 0 sinon.}$$

Montrer que, pour chaque $k \geq 0$, la suite de fonctions $(D^k f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $g_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ que l'on précisera. A-t-on convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

***Exercice 4*.** Construire une suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

(a) En tout point $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{m \in \mathbb{Z} : \varphi_m(x) \neq 0\}$ est fini.

(b)

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

— Autres exercices —

***Exercice 5* (Inégalité de Poincaré).** (a) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Prouver que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx = -2\Re\left(\int_{\mathbb{R}^n} x_i\varphi(x)D_{x_i}\overline{\varphi}(x)\,dx\right).$$

(b) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer, en utilisant (a), qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2\,dx \leq C\sum_{i=1}^n \int_\Omega |D_{x_i}\varphi(x)|^2\,dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

F. Bastin & C. Dubussy – 30 janvier 2020

1. c'est-à-dire si et seulement si $u_f = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.