2. Distributions : Concepts de base

— Exercices de base —

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont des distributions et donner leur support.

(a) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto D\varphi(1)$ (b) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (\varphi(0))^2$ (c) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(0) + D\varphi(1)$

(d) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx$ (e) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 |\varphi(x)|dx$ (f) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)$

(g) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n)$ (h) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ (i) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$

(j) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ (k) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (D^n\varphi)(0)$ (l) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(0)$

(m) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(n)$ (n) $\varphi \in \mathcal{D}(]0,+\infty[) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (D^n\varphi)\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 2. Montrer que les applications "parties finies" définies respectivement par

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$

et

$$\mathrm{Pf}\,\frac{H}{x^2} : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + (D\varphi)(0)\ln(\varepsilon) \right)$$

sont des distributions.

Exercice 3. (a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\lambda > -1$ les fonctions

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

définissent des distributions sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour $\Re\lambda > -1$ on a

$$\int_0^{+\infty} x^\lambda\varphi(x)\,dx = \int_0^1 x^\lambda(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx + \int_1^{+\infty} x^\lambda\varphi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}.$$

(c) En utilisant (b), montrer que l'on peut étendre la définition de x_+^λ aux $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\Re\lambda > -2$ et $\lambda \neq -1$. Généraliser ce procédé au cas où $\Re\lambda > -n-1$ et $\lambda \neq -1, \ldots, -n$. Définir de même x_-^λ pour ces valeurs de λ.

(d) Soient x_+^λ et x_-^λ les distributions définies au point (b). Calculer xx_+^λ et xx_-^λ.

Exercice 4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \Omega$, démontrer que la distribution de Dirac δ_x n'est pas une distribution associée à une fonction localement intégrable sur Ω.

Exercice 5. Montrer qu'il n'existe pas de distribution u dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec $e^{1/x}$ sur $]0,+\infty[$, c'est-à-dire telle que

$$u(\varphi)=\int_0^{+\infty} e^{1/x}\varphi(x)dx \quad \text{pour tout } \varphi\in\mathcal{D}(]0,+\infty[).$$

Exercice 6. On rappelle que les distributions $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $xu=0$ sont les $c\delta_0$ avec $c\in\mathbb{C}$. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, résoudre

(a) $xu=D^k\delta_0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

(b) $x^2u=\delta_0$.

(c) $x^nu=\delta_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les égalités suivantes :

$$(a)\ xu=2u \qquad (b)\ x^2u=u.$$

Exercice 8. Soit u une distribution de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction C^∞ telle que $f=0$ sur le support de u. A-t-on $fu=0$?

Exercice 9. Montrer que l'on ne peut pas définir le produit des distributions δ_0 et $\operatorname{vp}\frac{1}{x}$ au sens où ce produit ne peut pas être commutatif et distributif par rapport à la multiplication par les fonctions C^∞.

— Autres exercices —

Exercice 10. On rappelle que

$$\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln(m)\right)=\gamma\in\mathbb{R}.$$

(a) Montrer que l'application

$$u:\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\mapsto \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^m\varphi\left(\frac{1}{j}\right)-m\varphi(0)-\ln(m)(D\varphi)(0)\right)$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$ et déterminer son support S.

(b) On considère une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tels que

$$0\le\varphi_k(x)\le\frac{1}{\sqrt{k}},\quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}$$

$$\varphi_k(x)=0,\quad \text{pour tout } x\le\frac{1}{k+1} \text{ ou } x\ge 2$$

et

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{k}},\quad \text{pour } \frac{1}{k}\le x\le 1.$$

Montrer alors que

(b.1) La suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ tend vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}$.

(b.2) $D^\alpha\varphi_k=0$ sur S pour tout $\alpha,k\in\mathbb{N}_0$.

(b.3)

$$\lim_{k\to+\infty}u(\varphi_k)=+\infty.$$

(c) Conclure qu'on a ne peut pas avoir d'inégalité du type

$$|u(\varphi)|\le C\sup_{|a|\le k}\sup_{x\in S}|(D^\alpha\varphi)(x)|.$$