Année académique 2019-2020
Master Maths

3. Dérivées de distributions et équations différentielles

— Exercices de base —

Exercice 1. Simplifier au maximum les expressions suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$(a)\ e^{2x}\delta_0 + e^x D\delta_0, \qquad (b)\ x^p D^q \delta_0 \ \text{ pour } \ p,q\in\mathbb{N}, \qquad (c)\ D\big(\cos(x)\delta_\pi\big).$$

Exercice 2. On donne $f(x) = x|x|$, $x\in\mathbb{R}$, et on considère la distribution u associée à f. Déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de u.

Exercice 3. On considère l'application $u:\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\mapsto\int_{\mathbb{R}}\varphi(x,-x)\,dx.$$

(a) Montrer que $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

(b) Déterminer le support de u. Montrer que u n'est pas associée à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Calculer au sens des distributions $D_x u - D_y u$.

Exercice 4. On considère dans le plan, la distribution définie par la fonction localement intégrable

$$E(x,t) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } t-|x|>0 \\ 0 & \text{si } t-|x|\le 0. \end{cases}$$

Calculer au sens des distributions $D_t^2 u - D_x^2 u$.

Exercice 5.

(a) Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient $D^p u = 0$.

(b) Montrer que $D(fu) = f\,Du + (Df)\,u$ pour tous $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f\in C^\infty(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $D^p(e^{-cx}u) = e^{-cx}(D-c)^p u$ pour tout $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(d) Soient $p\in\mathbb{N}_0$ et $c\in\mathbb{C}$. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient $(D-c)^p u = 0$.

Exercice 6. Soit $L(D) = \sum_{\alpha=0}^p c_\alpha D^\alpha$ un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants. En utilisant l'exercice précédent, montrer que la solution la plus générale de l'équation homogène $L(D)(u) = 0$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$u = u_{P_{\alpha_1-1}(x)e^{a_1x}+\ldots+P_{\alpha_m-1}(x)e^{a_mx}}$$

où

(1) $a_1,\ldots,a_m$ sont les zéros distincts du polynôme $L(z) = \sum_{\alpha=0}^p c_\alpha z^\alpha$,

(2) pour tout $j\le m$, α_j est la multiplicité de a_j comme zéro de $L(z)$,

(3) pour tout $\alpha\in\mathbb{N}$, $P_\alpha(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à α.

Exercice 7. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$(a)\ D^2u-2Du+u=0 \qquad (b)\ Du+u=\delta_0 \qquad (c)\ D^2u=\delta_0 \qquad (d)\ xDu+u=\delta_0 \qquad (e)\ x^2Du=\delta_0$

Exercice 8. Si a et b sont deux complexes fixés, on considère l'opérateur différentiel

$$P = D^2 + aD + b.$$

Soient f et g deux fonctions de $C^2(\mathbb{R})$ telles que $(Pf)(x) = (Pg)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = g(0)$ et $Df(0) - Dg(0) = 1$. On pose

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si} \quad x \leq 0, \\ -g(x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

(8.1) Montrer que h définit une distribution u et calculer Pu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(8.2) En déduire la solution la plus générale dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation

$$D^2u + 2Du - 3u = \delta_0.$$

— Autres exercices —

Exercice 9. Soit $I =]a, b[$ ainsi que $f, g \in C^\infty(I)$. Montrer que si $u \in \mathcal{D}'(I)$ satisfait l'équation

$$Du + fu = g$$

alors u est associée à une fonction de classe C^∞ sur I.