4. Limites de distributions

— Exercices de base —

Exercice 1. Soient les suites f_m, g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ définies par

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{m} \\ m & \text{si } |x| < \frac{1}{m} \end{cases}$$

et

$$g_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{m} \\ m^2 & \text{si } |x| < \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Montrer que ces suites convergent presque partout vers 0 dans $\mathbb{R}$, que la suite u_{f_m} converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $2\delta_0$ et que la suite u_{g_m} ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Si elles existent, déterminer les limites pour $m \to +\infty$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des distributions suivantes :

(a) $m^2(\delta_{1/m} - 2\delta_0 + \delta_{-1/m})$ (b) $m^3(\delta_{1/m} - \delta_{-1/m} - 2D\delta_0)$.

Exercice 3. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{2}|x|^{\varepsilon-1}$ $(x \in \mathbb{R}_0)$ et on note u_ε la distribution associée. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, calculer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon$.

Exercice 4. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ on pose $f_\varepsilon(x) = \ln(x+i\varepsilon)$ où ln est le logarithme complexe principal.

(a) Montrer que lorsque $\varepsilon \to 0^+$, u_{f_ε} converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution u_{f_0} donnée par

$$f_0 = \begin{cases} \ln(x), & x > 0 \\ \ln|x| + i\pi, & x < 0. \end{cases}$$

(b) Calculer Du_{f_0} au sens des distributions.

(c) En déduire que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a

$$\frac{1}{x+i0} \underset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x+i\varepsilon} = -i\pi\delta_0 + \text{vp}\,\frac{1}{x}$$

et

$$\frac{1}{x-i0} \underset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x-i\varepsilon} = i\pi\delta_0 + \text{vp}\,\frac{1}{x}.$$

(d) En déduire que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)} = \delta_0$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soit $k \in \mathbb{N}_0$. On considère les suites $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = m^k e^{imx} \quad \text{et} \quad g_m(x) = me^{-m|x|}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Montrer que les suites de distributions $(u_{f_m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ et $(u_{g_m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer leurs limites.

Exercice 6. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ la suite définie par
$$f_m(x) = \frac{\sin(mx)}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_0$$
et soit u_m la distribution associée à f_m. Etudier la convergence de cette suite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$) qui converge vers f dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$). Est-ce que $(u_{f_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers u_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$? Justifier.

— Autres exercices —

Exercice 8. Pour tout $N \in \mathbb{N}_0$ considérons la fonction F_N définie par
$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}.$$
On pose u_N la distribution associée à F_N. Le but de l'exercice est de déterminer la limite (au sens des distributions) de $(u_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$.

(1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à support dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que
$$u_N(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)} \phi(t)dt,$$
où $\phi(t) = \sum_{m=-M}^{M} \varphi(t + 2m\pi)$.

(2) En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, où ψ est C^∞, démontrer que u_N converge vers $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi p}$.