5. Distributions tempérées et transformées de Fourier

— Exercices de base —

Exercice 1. On considère les fonctions définies dans $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = c, \quad f_2(x) = x^n, \quad f_3(x) = e^x \quad \text{et} \quad f_4(x) = e^{iax}, \quad f_5(x) = \cos(x)\sin(x),$$

avec $c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$ et $a \in \mathbb{R}$. Les distributions associées sont-elles tempérées dans $\mathbb{R}$? Si oui, en calculer la transformée de Fourier.

Exercice 2. (2.1) Justifier que si $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vers $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors la convergence a aussi lieu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(2.2) Donner une suite de fonctions $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Montrer qu'on a les inclusions

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

pour tout $p \in \{1, 2, \infty\}$.

Exercice 4. Rappelons que la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction $H = \chi_{]0,+\infty[}$ est donnée par

$$\mathcal{F}^{\pm} u_H(\varphi) = \pi\varphi(0) \pm i \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

En déduire l'expression de la transformée de Fourier de la valeur principale de $1/x$.

Exercice 5. En utilisant l'identité $|x| = xH(x) - xH(-x)$, calculer $\mathcal{F}^{-}|x|$ au sens des distributions et en déduire $\mathcal{F}^{-}\left(\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 6. Démontrer que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{i\lambda x}\mathrm{vp}(1/x) = i\pi\delta_0.$$

Pour ce faire, utiliser deux méthodes différentes. (Calcul direct et transformée de Fourier.)

Exercice 7. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On définit

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\varphi(k).$$

(6.1) Montrer que u définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

(6.2) Montrer que u est une distribution tempérée si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que $|a_k| \leq C\,(1+k)^p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que Df définit une distribution tempérée mais qu'on n'a pas d'estimation du type

$$|Df(x)| \leq C(1 + |x|)^N \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R},$$

où $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Pour tout $a > 0$, on considère l'application

$$\Delta_a : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(ka).$$

(8.1) Montrer que Δ_a définit une distribution tempérée dans $\mathbb{R}$.

(8.2) Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que $\mathcal{F}^- \Delta_a = b\Delta_b$.

Exercice 10. On considère les applications

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}} m\varphi(m) \ , \quad v : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(2\pi m).$$

(9.1) Montrer que u et v sont des distributions tempérées.

(9.2) Montrer que l'on a $\mathcal{F}^- u = 2i\pi Dv$.

Exercice 11. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution à support compact. Si $u(x^\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, montrer que $u = 0$.

— Autres exercices —

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable. On désigne par u la distribution associée à cette fonction.

(a) On suppose qu'il existe un naturel p tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1 + |x|)^p} \, dx < +\infty.$$

Montrer que u est tempérée.

(b)(b.1) Calculer Dg où g est la fonction définie par $g(x) = x^m \sin(\exp(x))$.

(b.2) Montrer que si u est la distribution associée à la fonction f définie par

$$f(x) = x^m \exp(x) \cos(\exp(x)),$$

$m \geq 1$, alors u est tempérée. En déduire que la réciproque du point (a) est fausse.

(c)(c.1) Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi = 1$ sur $[-1, 1]$, 0 hors de $[-2, 2]$ et $0 \leq \psi \leq 1$. Pour $r \geq 1$, on pose $\psi_r(x) = \psi(x/r)$. Montrer que pour tous $\alpha, k \geq 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $r \geq 1$, on ait

$$(1 + |x|)^k |\phi_r^{(\alpha)}(x)| \leq C(1 + r)^k.$$

(c.2) On suppose désormais que f est positive, et que u est une distribution tempérée. Montrer que la réciproque à la question (a) est vraie.

F. Bastin & C. Dubussy – 3 mars 2020