LIÈGE université
Sciences

DISTRIBUTIONS

Math 0074, Master Math

Année académique 2023-2024

Françoise Bastin

Notes préparées par F. Bastin notamment à partir des notes du cours de licence (1996 et 2000) de P. Laubin

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Les notations $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ désignent respectivement l'ensemble des naturels et celui des naturels non nuls. L'ensemble des fonctions indéfiniment continûment dérivables sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est noté $C_\infty(\Omega)$ et le sous-ensemble formé par les fonctions dont le support est un compact de $\mathbb{R}^n$ inclus dans Ω est noté $\mathcal{D}(\Omega)$ (on rencontre aussi parfois la notation $C_0^\infty(\Omega)$).

Il est fréquent de rencontrer des fonctions non dérivables dans des problèmes où le calcul différentiel serait bien utile. L'expérience montre que l'application brutale des techniques du calcul différentiel et intégral dans des situations où elles ne sont pas justifiées peut donner lieu à des résultats intéressants ou à des non-sens.

Tout comme l'ensemble des nombres complexes étend l'ensemble des nombres réels et permet d'extraire des racines carrées sans restriction, la théorie des distributions fournit un nouveau cadre qui justifie certains calculs illicites dans le cadre restreint des fonctions. La théorie des distributions est devenue un outil très puissant notamment à la suite des travaux de Laurent Schwartz (années 1950), lequel a su en présenter tout l'intérêt pratique tout en établissant une théorie mathématique rigoureuse.

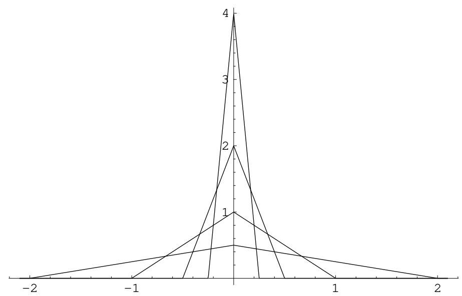
Donnons deux exemples introductifs posant des problèmes qui seront résolus lorsque les distributions seront étudiées.

a) Pour tout $m > 0$, considérons l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} D^2 u_m + u_m = f_m \\ u_m = 0 \quad \text{si } x < -1/m \end{array} \right. \tag{1.1}$$

avec

$$f_m(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1/m, \\ m\,(1 - m|x|), & \text{si} \quad |x| \leq 1/m. \end{array} \right. \tag{1.2}$$



La suite de fonctions f_m.

Pour tout m, la fonction f_m est d'intégrale égale à 1 et son support est $[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$. L'équation (1.1) est celle d'un oscillateur harmonique initialement à la position d'équilibre et qui est perturbé par une impulsion d'intégrale constante mais de plus en plus concentrée au voisinage de 0.

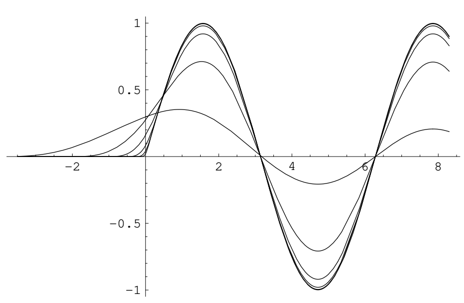
Pour tout m, la résolution de l'équation tenant compte de la condition d'annulation conduit à la solution

$$u_m(x) \;=\; P_1(x)\,\sin(x)$$

avec

$$P_1(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1/m \\ m\sin(x) + m^2 x\sin(x) + m^2\cos(x) - m^2\cos(1/m) & \text{si } -1/m \leq x \leq 0 \\ 2m^2 - m^2\cos(1/m) + m\sin(x) - m^2 x\sin(x) - m^2\cos(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/m \\ 2m^2 - 2m^2\cos(1/m) & \text{si } 1/m \leq x \end{cases}$$

Les solutions u_m sont représentées ci-dessous pour $m = 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$ (repère orthogonal non normé)



Convergence des solutions u_m de (1.1).

On constate que la suite u_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge ponctuellement vers la fonction

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \sin(x) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

si $m \to +\infty$. Cette fonction n'est pas deux fois dérivable en 0. Peut-on écrire une équation limite analogue à (1.1) pour la fonction u ? Cette équation modéliserait une impulsion instantanée. Quel en serait le second membre ?

b) Paul Dirac[1] définit sa fonction généralisée par la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \tag{1.3}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Les règles du calcul intégral interdisent l'existence d'une telle fonction[2] $\delta \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Par contre, une suite de fonctions peut approcher la propriété demandée par (1.3).

Considérons par exemple les fonctions f_m définies en (1.2). Il vient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x)\varphi(x)\,dx &= m\int_{-1/m}^{1/m} (1-m|x|)\,\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} (1-|x|)\,\varphi\left(\frac{x}{m}\right)\,dx \\
&\to \varphi(0)\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx = \varphi(0)
\end{aligned}$$

si $m \to +\infty$ en vertu du théorème de Lebesgue.

Cette propriété est réalisée par de nombreuses suites de fonctions. Par exemple, les fonctions gaussiennes

$$g_m(x) = \sqrt{\frac{m}{\pi}}\, e^{-mx^2} \tag{1.4}$$

conviennent également car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_m(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)\,dx \to \varphi(0)$$

si $m \to +\infty$.

30 janvier 2024

1. Paul Adrien Maurice Dirac est un mathématicien et physicien britannique né en 1909 et décédé en 1984.
2. L'intégrale de cette fonction avec tout élément de $D(\mathbb{R})$ serait nulle donc la fonction serait nulle pp dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (résultat classique mais qui sera démontré dans la suite). L'intégrale serait donc nulle pour toute fonction φ, ce qui est absurde.

Chapitre 2

Eléments de la théorie des distributions

2.1 Fonctions test

Nous adoptons l'approche classique qui consiste à définir les distributions comme des fonctionnelles linéaires continues sur l'ensemble des fonctions indéfiniment continûment dérivabless à support compact. Une première étape consiste à rassembler les principales propriétés de ces fonctions. On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 Supports : rappels et compléments

Définition 2.1.1 *Soit f une fonction définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Un ouvert ω inclus dans Ω est un ouvert d'annulation pour f si $f(x) = 0$ pour tout x dans ω. L'union de tous les ouverts d'annulation de f est encore un ouvert d'annulation de f. Son complémentaire dans Ω est appelé le support de f et est noté*

$$\textit{supp}(f) \text{ ou encore } [f].$$

Soit f une fonction définie presque partout dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Un ouvert ω inclus dans Ω est un ouvert d'annulation presque partout pour f si $f(x) = 0$ pour presque tout x dans ω. L'union de tous les ouverts d'annulation presque partout de f est encore un ouvert d'annulation presque partout de f (voir cours d'analyse en bachelier). Son complémentaire dans Ω est appelé le support presque partout de f et est noté

$$\textit{supp}_{pp}(f) \text{ ou encore } [f]_{pp}.$$

• Rappelons aussi que f est défini dans Ω, on a

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

(l'adhérence est prise dans Ω) ; si en outre f est continu on a

$$\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}_{pp}(f).$$

• Soient f, g des fonctions définies (pp) sur Ω et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Rappelons également les propriétés suivantes à propos des supports (des supports presque partout)

$$[\alpha f + \beta g] \subset [f] \cup [g] \quad \text{et} \quad [fg] \subset [f] \cap [g].$$

• Rappelons encore que l'on désigne par $C_\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment continûment dérivables dans Ω à valeurs complexes. Le sous-espace formé des éléments dont le support est un compact inclus dans Ω est noté

$$\mathcal{D}(\Omega).$$

Plus généralement, si e est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, on définit aussi

$$\mathcal{D}(e)$$

comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que $[f] \subset e$.

• Notons que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega} = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n}.$$

De fait, on a tout d'abord [1]

$$\overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n} \cap \Omega = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

donc

$$\overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega} \subset \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n}.$$

Par ailleurs, comme le support de φ est un compact, c'est un fermé de $\mathbb{R}^n$; l'inclusion $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\} \subset \mathrm{supp}(\varphi)$ donne alors

$$\overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n} \subset \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega} = \mathrm{supp}(\varphi).$$

D'où l'égalité annoncée.

• Toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ peut être prolongée en une fonction $\tilde{\varphi}$ définie dans $\mathbb{R}^n$ en posant $\tilde{\varphi} = \varphi$ dans Ω et $\tilde{\varphi} = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. On a $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. De fait, $\tilde{\varphi}$ est de classe C_∞ dans les ouverts Ω et [2] $\mathbb{R}^n \setminus [\varphi]$ et ces deux ouverts recouvrent $\mathbb{R}^n$. De plus,

$$[\tilde{\varphi}] = [\varphi]$$

vu

$$[\varphi] = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega} = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{\varphi}(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n} = [\tilde{\varphi}].$$

On ne fait généralement pas de distinction entre les fonctions φ et $\tilde{\varphi}$ bien que leurs domaines de définition soient distincts.

1. résultat de topologie générale pour les topologies induites
2. ce qui s'établit directement car si $x \notin [\varphi]$ alors $\varphi = 0$ dans un voisinage de x donc $\tilde{\varphi}$ également vu sa définition.

2.1.2 Convergence

Introduisons la notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 2.1.2 On dit qu'une suite φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ *converge dans* $\mathcal{D}(\Omega)$ vers un élément φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe un compact K de Ω tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout m, $[\varphi] \subset K$ et

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_K |D^\alpha \varphi_m - D^\alpha \varphi| = 0$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

On dit qu'une suite φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe une fonction φ de cet ensemble pour laquelle elle vérifie ce qui précède.

Une suite φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ est dite *de Cauchy dans* $\mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe un compact K de Ω tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout m et

$$\lim_{r,s\to+\infty} \sup_K |D^\alpha \varphi_r - D^\alpha \varphi_s| = 0$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

On voit donc que la notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est rien d'autre que la convergence uniforme de toutes les dérivées, avec en plus l'exigence d'un compact fixe qui contient tous les supports.

Une suite φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ est dite *bornée dans* $\mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe un compact K de Ω tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout m et si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante C_α telle que

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_m| \leq C_\alpha \text{ pour tout } m.$$

Bien sûr il est immédiat de se convaincre des propriétés suivantes.

- Une suite φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si $\varphi_m - \varphi$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$.
- Une combinaison linéaire de suites convergentes dans $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers la combinaison linéaire correspondante des limites.
- Le produit de deux suites convergentes converge vers le produit des limites.

Théorème 2.1.3 *[Critère de Cauchy] Une suite φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si elle est de Cauchy dans $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Preuve. La preuve est tout à fait classique.

La condition est nécessaire car si la suite φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il existe un compact K de Ω tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout m et on a

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_r - D^\alpha \varphi_s| \leq \sup_K |D^\alpha \varphi_r - D^\alpha \varphi| + \sup_K |D^\alpha \varphi - D^\alpha \varphi_s|.$$

On conclut aisément.

Montrons qu'elle est aussi suffisante. Si la suite φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est de Cauchy, il existe un compact K de Ω tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout m. De plus, la suite φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) et toutes ses dérivées satisfont au critère de Cauchy de la convergence uniforme dans tout compact de Ω. Par le théorème de convergence des fonctions continûment dérivables, la suite φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge uniformément dans tout compact de Ω avec toutes ses dérivées vers une fonction φ qui est de classe C_∞ dans Ω. La fonction φ est nulle dans $\Omega \setminus K$ car il en est ainsi de toutes les fonctions φ_m.□

Exemple 2.1.4 Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction d'intégrale égale à 1 et dont le support est inclus dans la boule unité. Pour tout entier m strictement positif, posons $\psi_m(x) = m^n \psi(mx)$. Toutes les fonctions ψ_m ont une intégrale égale à 1.

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la suite $\varphi * \psi_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
Ce résultat est semblable à ce qui se passe pour les unités approchée de composition.

De fait, on a

$$[\varphi * \psi_m] \subset [\varphi] + [\psi_m] \subset [\varphi] + b(1/m)$$

donc les supports des fonctions $\varphi * \psi_m$ sont inclus dans un compact fixe. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout multi-indice α, on a

$$\begin{aligned}
D^\alpha(\varphi * \psi_m - \varphi)(x) &= (D^\alpha \varphi) * \psi_m(x) - D^\alpha \varphi(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x-y) \psi_m(y) dy - D^\alpha \varphi(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \varphi(x-y) - D^\alpha \varphi(x)) \psi_m(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \varphi(x-y/m) - D^\alpha \varphi(x)) \psi(y) dy.
\end{aligned}$$

Cela étant

$$|D^\alpha(\varphi * \psi_m - \varphi)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(y)| dy \sup_{|y| \le 1/m} |D^\alpha \varphi(x+y) - D^\alpha \varphi(x)|.$$

Ceci démontre le résultat car toutes les dérivées de φ sont uniformément continues sur $\mathbb{R}^n$.□

Proposition 2.1.5 *Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega f(x)\, \varphi(x) dx = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors f est égal à 0 presque partout.

Preuve. Cf le cours d'introduction à l'analyse harmonique MATH0511.□

2.2 Distributions

Les valeurs ponctuelles d'une fonction irrégulière n'ont guère de sens. La valeur en 0 de la fonction saut $\chi_{]0,+\infty[}$ est arbitraire. Par contre, la proposition 2.1.5 montre qu'une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est entièrement caractérisée par ses intégrales avec les éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$. On peut donc identifier f à la fonctionnelle linéaire

$$\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

La théorie des distributions adopte ce point de vue.

Définition 2.2.1 Une *distribution* u dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que la suite $u(\varphi_m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers $u(\varphi)$ quelle que soit la suite φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Puisque u est linéaire, on peut se limiter dans cette définition à considérer les suites φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ qui convergent vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$. On désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions dans Ω. La condition de continuité des distributions se traduit aussi utilement par des majorations [3]

Théorème 2.2.2 *Une fonctionnelle linéaire u sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si, pour tout compact K de Ω, il existe des constantes C, k telles que*

$$|u(\varphi)| \le C \sup_{|\alpha|\le k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \qquad \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

Preuve. La condition est suffisante vu la définition de la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Montrons qu'elle est nécessaire. Supposons qu'il existe un compact K de Ω tel que l'inégalité ci-dessus ne soit réalisée pour aucune valeur de C et k. En prenant $C = k = m$, on obtient pour tout naturel strictement positif m une fonction $\varphi_m \in \mathcal{D}(K)$ telle que

$$|u(\varphi_m)| > m \sup_{|\alpha|\le m} \sup_K |D^\alpha \varphi_m|.$$

Puisque cette inégalité reste inchangée lorsque φ_m est multiplié par une constante non nulle, on peut supposer que $u(\varphi_m) = 1$ pour tout m. On a alors

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_m| \le \frac{1}{m} \quad \text{si} \quad |\alpha| \le m.$$

3. En fait, on munit $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une topologie naturelle de limité inductive et $\mathcal{D}'(\Omega)$ est son dual. La majoration énoncée dans 2.2.2 est en fait celle qui traduit la continuité sur la limite inductive. Il se fait que la spécificité de la topologie permet de caractériser la continuité également à l'aide de limites de suites, comme dans la définition adoptée.

En particulier, la suite φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Puisque u est une distribution, ceci entraîne la convergence de la suite $u(\varphi_m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) vers 0 d'où une contradiction. $\square$

Donnons quelques exemples.

a) Si μ est une mesure dans Ω, alors

$$u(\varphi) = \int_\Omega \varphi d\mu$$

définit une distribution dans Ω. On a ici

$$|u(\varphi)| \leq V\mu(K) \sup_K |\varphi| \qquad \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

b) Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la distribution δ_{x_0} de Dirac peut être définie par

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

c) Si f est une fonction localement intégrable dans Ω, la fonctionnelle u_f définie par

$$u_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\ dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

est une distribution dans Ω.

d) La fonction $1/x,\ x \in \mathbb{R}_0$ n'est pas localement intégrable dans $\mathbb{R}$. On peut cependant définir une distribution associée, appelée *valeur principale ou partie finie de* $1/x$. Il s'agit de la distribution (notée $pv(1/x)$ ou $pf(1/x)$ dans la suite)

$$pv\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On montre directement qu'il s'agit bien d'une distribution dans $\mathbb{R}$ en vérifiant que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \ = \ -\int_{\mathbb{R}} D\varphi(x)\ \ln(|x|)\ dx$$

et en utilisant la majoration de continuité pour le dernier terme (la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est localement intégrable dans $\mathbb{R}$).

2.3 Dérivation des distributions

2.3.1 Définition

Définition 2.3.1 *Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on pose*

$$(D_{x_j}u)(\varphi) = u(-D_{x_j}\varphi) \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

et, si $f \in C_\infty(\Omega)$,

$$(fu)(\varphi) = u(f\varphi) \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On définit ainsi des distributions $D_{x_j}u$ et fu dans Ω.

De fait, d'une part la linéarité est immédiate.

D'autre part, si

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \qquad \varphi \in \mathcal{D}(K),$$

on a

$$|(D_{x_j}u)(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k+1} \sup_K |D^\alpha \varphi|$$

et [4]

$$|(fu)(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |D^\alpha(f\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |\sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} f D^\beta \varphi| \leq C' \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi|$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

La continuité aurait bien sûr pu également être obtenue en repassant à la définition donnée.

2.3.2 Quelques propriétés

a) Comme pour les fonctions de classe C_2, on peut permuter l'ordre des dérivations

$$D_{x_k} D_{x_j} u = D_{x_j} D_{x_k} u \qquad u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

De fait, on a

$$(D_{x_k} D_{x_j} u)(\varphi) = -(D_{x_j} u)(D_{x_k}\varphi) = u(D_{x_j} D_{x_k}\varphi) = u(D_{x_k} D_{x_j}\varphi) = (D_{x_j} D_{x_k} u)(\varphi).$$

Ceci permet d'utiliser la notation $D^\alpha u$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, pour désigner les dérivées partielles d'une distribution

$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi).$$

b) La règle de dérivation d'un produit reste valable

$$D_{x_k}(fu) = (D_{x_k} f)u + f D_{x_k} u \qquad ; f \in C_\infty(\Omega),\ u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

On a en effet

$$-u(f D_{x_k}\varphi) = u((D_{x_k} f)\varphi) - u(D_{x_k}(f\varphi)) \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

4. Formule de Leibniz : si $f, g \in C^p(\Omega)$, et $|\alpha| \leq p$, on a $D^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta D^\beta f D^{\alpha-\beta} g$ où $C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \frac{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}{\beta_1!\ldots\beta_n!\ (\alpha_1-\beta_1)!\ldots(\alpha_n-\beta_n)!}$.

c) Si $g \in C_k(\Omega)$ et $|\alpha| \leq k$, on a

$$D^\alpha u_g = u_{D^\alpha g}.$$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit $P =]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_n, b_n[$ un pavé d'adhérence compacte incluse dans Ω et contenant le support de φ. On a alors, par intégration par parties successives pour la deuxième égalité,

$$\int_\Omega g(x)(-D)^\alpha \varphi(x)\,dx = \int_P g(x)(-D)^\alpha \varphi(x)\,dx = \int_P D^\alpha g(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega D^\alpha g(x)\varphi(x)\,dx.$$

d) Si $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a directement $fu_g = u_{fg}$.

2.3.3 Exemples

Exemple 2.3.2 *Par définition,*

$$(D^k\delta_0)(\varphi) = (-1)^k D^k \varphi(0).$$

On a

$$x^j D^k \delta_0 = \begin{cases} 0 & si \quad j > k \geq 0, \\ (-1)^j \dfrac{k!}{(k-j)!} D^{k-j}\delta_0 & si \quad 0 \leq j \leq k. \end{cases} \tag{2.1}$$

La relation (2.1) s'obtient aisément en utilisant la formule de Leibniz : on a en effet

$$\begin{aligned} (x^j D^k \delta_0)(\varphi) &= (-1)^k D^k [x^j \varphi(x)]_{x=0} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j > k \geq 0, \\ (-1)^k C_k^j\, j! D^{k-j}\varphi(0) & \text{si} \quad 0 \leq j \leq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 2.3.3 *La fonction H définie par $H(x) = 1$ si $x > 0$ et $H(x) = 0$ si $x \leq 0$, porte le nom de* fonction de Heaviside. *Sa valeur en 0 importe peu. Considérons la distribution Y sur $\mathbb{R}$ définie par*

$$Y(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

On a

$$DY = \delta_0.$$

De fait,

$$DY(\varphi) = Y(-D\varphi) = -\int_0^{+\infty} D\varphi(x)dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition 2.3.4 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et f une fonction de classe C_1 dans $I \setminus \{x_0\}$. Si Df est intégrable au voisinage de x_0 alors les limites*

$$f(x_0\pm) = \lim_{x \to x_0\pm} f(x)$$

existent, sont finies et

$$Du_f = u_{Df} + (f(x_0+) - f(x_0-))\, \delta_{x_0}.$$

Cet énoncé s'applique à la fonction d'Heaviside mais aussi à la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ pour laquelle on a donc

$$Du_{|x|^{1/2}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\, u_{|x|^{-1/2}}$$

dans $\mathbb{R}$.

Preuve. Si $x_0 < y$ et $[x_0, y] \subset I$ alors

$$f(x) = f(y) - \int_x^y Df(s)\, ds, \quad x_0 < x < y.$$

Puisque Df est intégrable dans $[x_0, y]$, la limite $f(x_0+)$ existe. De la même façon $f(x_0-)$ existe aussi. Cela étant, f est localement intégrable dans $]a, b[$ et on a

$$\begin{aligned} Du_f(\varphi) &= -\int_I f(x) D\varphi(x)\, dx = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-x_0|>\epsilon} f(x) D\varphi(x)\, dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{|x-x_0|>\epsilon} Df(x)\varphi(x)\, dx + (f\varphi)(x_0+\epsilon) - (f\varphi)(x_0-\epsilon) \right) \\ &= u_{Df}(\varphi) + (f(x_0+) - f(x_0-))\, \delta_{x_0}(\varphi). \end{aligned}$$

Exemple 2.3.5 *On a (au sens d'égalité entre distributions !)*

$$D_x \ln(|x|) = pv\left(\frac{1}{x}\right).$$

2.3.4 Propriétés-suite

Proposition 2.3.6 *Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $u \in \mathcal{D}'(I)$ est tel que $Du = 0$ alors u est la distribution associée à une fonction constante.*

Preuve. Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(I)$ d'intégrale égale à 1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, la fonction

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(s)\, ds - \int_a^b \varphi(s)\, ds \int_a^x \varphi_0(s)\, ds$$

appartient à $\mathcal{D}(I)$. On a donc

$$0 = u(D\Phi) = u\left(\varphi - \varphi_0 \int_a^b \varphi(s)\, ds\right) = u(\varphi) - u(\varphi_0) \int_a^b \varphi(s)\, ds.$$

Ceci démontre le théorème. □

Proposition 2.3.7 *Si $I =]a,b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{D}'(I)$, il existe $v \in \mathcal{D}'(I)$ tel que $Dv = u$. Si $f \in L^1_{loc}(I)$, $x_0 \in I$ et*

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds \quad , \quad x \in I,$$

on a $Du_g = u_f$.

Preuve. Si la fonction φ_0 est choisie comme dans la proposition précédente, la distribution

$$v(\varphi) = -u_{(x)}(\int_a^x \varphi(s)\,ds - \int_a^b \varphi(s)\,ds \int_a^x \varphi_0(s)\,ds)$$

vérifie $Dv = u$.

Supposons que $f \in L^1_{loc}(I)$. Si la fonction g est définie comme ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
-\int_a^b g(x)D\varphi(x)\,dx &= -\int_a^b D\varphi(x)\,dx \int_{x_0}^x f(s)\,ds \\
&= \int_a^{x_0} D\varphi(x)\,dx \int_x^{x_0} f(s)\,ds - \int_{x_0}^b D\varphi(x)\,dx \int_{x_0}^x f(s)\,ds \\
&= \int_a^{x_0} f(s)\,ds \int_a^s D\varphi(x)\,dx - \int_{x_0}^b f(s)\,ds \int_s^b D\varphi(x)\,dx \\
&= \int_a^b f(s)\varphi(s)\,ds
\end{aligned}$$

en vertu du théorème de Fubini. □

On peut aussi vérifier directement que la distribution v construite à partir de u_f est à une constante près la distribution u_g.

Signalons (sans preuve) aussi les résultats suivants dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.3.8 *Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $u \in \mathcal{D}'(\omega \times I)$ et $D_{x_n}u = 0$ alors il existe $u_0 \in \mathcal{D}'(\omega)$ tel que*

$$u(\varphi) = \int_I u_0(\varphi(.,x_n))\,dx_n$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega \times I)$.

Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $D_{x_j}u = 0$ pour $j = 1, \ldots, n$ alors u est la distribution associée à une fonction constante.

Corollaire 2.3.9 *Si $f, g_1, \ldots, g_n$ sont des fonctions continues dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $D_{x_j}u_f = u_{g_j}$ pour tout j alors $f \in C_1(\Omega)$ et $D_{x_j}f = g_j$.*

2.4 Support d'une distribution

2.4.1 Définition

Définition 2.4.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et u une distribution dans Ω. Un ouvert ω inclus dans Ω est un ouvert d'annulation de u si $u(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Lemme 2.4.2 *Toute union d'ouverts d'annulation d'une distribution est un ouvert d'annulation.*

Preuve. Soient ω un ouvert de Ω qui est une union d'ouverts d'annulation de u et φ un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$. Puisque le support de φ est compact et inclus dans ω, il existe un nombre fini d'ouverts $\omega_1, \ldots, \omega_N$ qui sont des ouverts d'annulation de u et tels que

$$[\varphi] \subset \bigcup_{j=1}^{N} \omega_j.$$

Posons

$$\omega_{j,m} = \left\{ x \in \omega_j : |x| < m, d(x, \mathbb{R}^n \setminus \omega_j) > \frac{1}{m} \right\}.$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, ces ouverts sont emboîtés en croissant et leur union est ω_j. Comme $[\varphi]$ est compact et inclus dans $\cup_{m=1}^{+\infty} \cup_{j=1}^{N} \omega_{j,m}$ il existe alors un naturel m_0 tel que

$$[\varphi] \subset \bigcup_{j=1}^{N} \omega_{j,m_0}.$$

Cela étant, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, l'adhérence de ω_{j,m_0} est un compact de ω_j ; il existe donc une fonction $\alpha_j \in D(\omega_j)$ égale à 1 dans ω_{j,m_0} et telle que $0 \leq \alpha_j \leq 1$. La fonction $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j$ est de classe C_∞ dans $\mathbb{R}^n$ et est strictement positive dans $\cup_{j=1}^{N} \omega_{j,m_0}$. Il s'ensuit que, pour tout $j_0 \in \{1, \ldots, N\}$, la fonction

$$\varphi_{j_0} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{j_0} \varphi}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k} & \text{si } x \in \bigcup_{j=1}^{N} \omega_{j,m_0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}(\omega_{j_0})$ et $\varphi = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j$ dans $\mathbb{R}^n$. Puisque les ouverts ω_j sont des ouverts d'annulation, on a

$$u(\varphi) = \sum_{j=1}^{N} u(\varphi_j) = 0.$$

L'ouvert ω est donc un ouvert d'annulation. □

Le lemme 2.4.2 montre que toute distribution u possède un plus grand ouvert d'annulation. C'est l'union de tous les ouverts d'annulation de u.

Définition 2.4.3 Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, le *support* de u, noté $[u]$ est le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert d'annulation de u.

Par définition, $[u]$ est un fermé de Ω et on a $u(\varphi) = 0$ si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $[u] \cap [\varphi] = \emptyset$.

Donnons quelques exemples.

a) Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a
$$[u_f] = [f]_{pp}.$$

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a
$$[\delta_a] = \{a\}.$$

c) Si $u_1, \ldots, u_p \in D'(\Omega)$ et $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}$, on a
$$\left[\sum_{j=1}^{p} c_j u_j\right] \subset \bigcup_{j=1}^{p} [u_j].$$

d) Si $f \in C_\infty(\Omega)$ et si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors
$$[fu] \subset [u] \cap [f].$$

Terminons par une propriété (très facile à démontrer) qui est fort utile et qui sera à comparer avec le résultat appelé « Théorème d'annulation ».

Propriété 2.4.4 *Si φ, ψ sont des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ égales dans un voisinage ouvert V de $[u]$ alors*
$$u(\varphi) = u(\psi).$$

Preuve. En effet, $\varphi - \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est telle que $[\varphi - \psi] \cap [u] \subset (\Omega \setminus V) \cap [u] = \emptyset$ donc $u(\varphi - \psi) = 0$. □

2.4.2 Extension par supports

Des considérations de supports permettent d'étendre la définition d'une distribution à des fonctions qui ne sont pas à support compact.

Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in C_\infty(\Omega)$.

Lorsque $[u] \cap [f] = \emptyset$, u distribution dans Ω et f de classe C_∞ dans Ω, alors $u(f) = 0$. En effet, on a $u(f\psi) = (fu)(\psi) = 0$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ car $[fu] \subset [f] \cap [u] = \emptyset$.

Soit alors $K = [u] \cap [f]$ compact et non vide. Il existe alors une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K. L'expression $u(\psi f)$ est indépendante du choix de ψ. En effet, si $\psi' \in \mathcal{D}(\Omega)$ est aussi égale à 1 au voisinage de K, on a
$$[(\psi - \psi')f] \cap [u] \subset [\psi - \psi'] \cap [f] \cap [u] \subset (\Omega \setminus K) \cap K = \emptyset.$$

De là, $0 = u((\psi - \psi')f) = u(\psi f) - u(\psi' f)$ par définition du support de u. On écrit alors $u(f)$ pour désigner la valeur commune des $u(\psi f)$.

Notons que si u est une distribution à support compact, $u(f)$ est défini pour tout $f \in C_\infty(\Omega)$ puisque $[u] \cap [f]$ est toujours compact.

2.4.3 Théorème d'annulation

On a vu ce que l'on entendait par la notion de support d'une distribution ; d'une manière que nous avons tout à fait précisée, il s'agit en fait « d'un ensemble en dehors duquel la distribution est nulle ». Dans la définition adoptée, tous les termes sont importants ; de plus, les estimations (topologiques) de $u(\varphi)$ à partir de bornes supérieures de φ et de ses dérivées ne peuvent pas être « améliorées » en utilisant justement le support, c'est-à-dire « là où la distribution n'est pas nulle ».

Nous allons compléter et préciser ceci notamment dans ce qui suit.

Soit u une distribution dans un ouvert Ω. Pour tout compact K de Ω et tout voisinage ouvert V du support de u, il existe des constantes C, k telles que

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{K\cap V} |D^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

De fait, soit $\psi \in \mathcal{D}(V)$ égal à 1 au voisinage de $K \cap [u]$. Par le théorème 2.2.2, il existe des constantes C, k telles que

$$|u(\varphi)| = |u(\psi\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{[\psi]} |D^\alpha(\psi\varphi)|$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. En utilisant la formule de Leibniz, on obtient la majoration annoncée.

Dans cette majoration, V est un voisinage arbitraire du support de u. En général, on ne peut pas prendre $V = [u]$ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.4.5 Considérons la distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définie par

$$u(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right) - \varphi(0) - \frac{D\varphi(0)}{m} \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Par la formule de Taylor [5], on a

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right) - \varphi(0) - \frac{D\varphi(0)}{m} = \frac{1}{m^2} \int_0^1 (1-t) D^2\varphi\left(\frac{t}{m}\right) dt$$

5. $\forall x, y \in \Omega$ tels que le segment d'extrémités x, y soit inclus dans Ω, $\forall f$ de classe C_p dans Ω, on a

$$f(y) - f(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(y-x)^k}{k!}(D^k f)(x) \; + \; \frac{(y-x)^p}{(p-1)!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} (D^p f)(x + t(y-x)) \, dt$$

donc
$$\left|\varphi(\frac{1}{m}) - \varphi(0) - \frac{D\varphi(0)}{m}\right| \leq \frac{1}{2m^2}\sup_{\mathbb{R}}|D^2\varphi|.$$
Cette inégalité assure la convergence de la série et la majoration
$$|u(\varphi)| \leq C\sup_{\mathbb{R}}|D^2\varphi| \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$
Le support de u est compact et est donné par [6]
$$[u] = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Pour tout entier strictement positif m, soit $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égal à $1/\sqrt{m}$ au voisinage de $[1/m, 1]$, égal à 0 au voisinage de $[0, 1/(m+1)]$ et tel que $0 \leq \varphi_m \leq 1/\sqrt{m}$. Par construction, les fonctions φ_m sont uniformément majorées par $1/\sqrt{m}$ et toutes leurs dérivées sont nulles sur le support de u. Elles convergent donc uniformément avec toutes leurs dérivées vers 0 sur le support de u. Cependant, on a
$$u(\varphi_m) = \frac{m}{\sqrt{m}} = \sqrt{m} \to +\infty.$$
Toute majoration de la forme
$$|u(\varphi)| \leq C\sup_{|\alpha|\leq k}\sup_{[u]}|D^\alpha\varphi| \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$
est donc exclue.

On a cependant le résultat suivant.

Théorème 2.4.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $D^\alpha\varphi$ est égal à 0 sur le support de u pour tout α alors $u(\varphi) = 0$.*

Démontrons un résultat un peu plus précis.

Lemme 2.4.7 *Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, K un compact de Ω et k un entier positif. S'il existe une constante C telle que*
$$|u(\varphi)| \leq C\sup_{|\alpha|\leq k}\sup_{K}|D^\alpha\varphi|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K),$$
alors toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ nulle sur $[u]$ avec toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à k vérifie $u(\varphi) = 0$.

6. Soi K l'ensemble dont les éléments sont 0 et les $1/m$, $m \in \mathbb{N}_0$. D'une part, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a son support inclus dans le complémentaire de K, alors φ est nul en 0 et en tous les $1/m$ et même nul au voisinage de 0, donc $D\varphi(0) = 0$ et on obtient $u(\varphi) = 0$; il s'ensuit que le complémentaire de K est un ouvert d'annulation pour u. C'est en fait le plus grand ouvert d'annulation car si Ω est un ouvert d'annulation de u qui contient strictement le complémentaire de K, alors Ω contient au moins un point de K. S'il contient un $1/m$, on prend $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui vaut 1 en $1/m$ et 0 dans un voisinage qui ne rencontre ni 0 ni les autres $1/m$; on a donc $u(\varphi) \neq 0$, ce qui contredit le fait que Ω est un ouvert d'annulation pour u. S'il contient 0, il contient aussi des $1/m$ puisque la suite $1/m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0.

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ nul sur $[u]$ avec toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à k.

Si $[u] \cap [\varphi] = \emptyset$ alors $u(\varphi) = 0$ directement.

Supposons donc que cela ne soit pas le cas. L'idée est d'utiliser des fonctions $\chi_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui vont permettre d'écrire

$$u(\varphi) = u(\varphi \chi_\epsilon) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \forall \epsilon > 0$$

et ayant en plus une estimation globale des dérivées ; ensuite, le développement intégral de Taylor et l'hypothèse d'annulation de u permettra d conclure ≪ sur le fil ≫.

• Introduction des χ_ϵ.

Pour tout $\epsilon > 0$, posons

$$M_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, [u] \cap [\varphi]) \leq \epsilon\}.$$

L'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^n : d(y, [u] \cap [\varphi]) < \epsilon\}$ est un ouvert et contient $[u] \cap [\varphi]$; il en est donc un voisinage. Si ϵ est assez petit, M_ϵ est un compact de Ω. Il existe donc des fonctions $\chi_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égales à 1 au voisinage de $[u] \cap [\varphi]$ et telles que $[\chi_\epsilon] \subset M_\epsilon$. On peut choisir les fonctions χ_ϵ de telle manière qu'il existe une constante C_0 vérifiant

$$|D^\alpha \chi_\epsilon| \leq C_0 \epsilon^{-|\alpha|} \text{ si } |\alpha| \leq k.$$

Remarquons que l'on a $[(1 - \chi_\epsilon)\varphi] \cap [u] \subset [1 - \chi_\epsilon] \cap [\varphi] \cap [u] = \emptyset$ par construction ; dès lors

$$u(\varphi) = u(\chi_\epsilon \varphi), \quad \forall \epsilon > 0.$$

• Passons à l'utilisation du développement de Taylor. Si $|\alpha| \leq k$ et $y \in M_\epsilon$, il existe $x \in [u] \cap [\varphi]$ tel que $|x - y| \leq \epsilon$. Par hypothèse, on a

$$D^{\alpha+\beta}\varphi(x) = 0 \text{ si } |\beta| \leq k - |\alpha|.$$

La formule de Taylor [7] appliquée à $D^\alpha \varphi$ en x à l'ordre $k - |\alpha| > 0$ s'écrit donc

$$D^\alpha \varphi(y) = (k - |\alpha|) \sum_{|\beta| = k - |\alpha|} \frac{(y-x)^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^{k-|\alpha|-1} D^{\alpha+\beta}\varphi((1-t)x + ty)dt.$$

Cela étant on obtient

$$|D^\alpha \varphi(y)| \leq (k - |\alpha|) \sum_{|\beta| = k - |\alpha|} \frac{\epsilon^{|\beta|}}{\beta!} \sup_{|\nu| = k} \sup_{M_\epsilon} |D^\nu \varphi|.$$

7. Si le segment d'extrémités x, y est inclus dans Ω et si f est de classe C_p dans Ω, on a, avec $h = y - x$,

$$f(y) - f(x) = \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{|\alpha| = j} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x) + p \sum_{|\alpha| = p} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} (D^\alpha f)(x + th)dt$$

Voir l'annexe pour une preuve.

Il existe donc une constante C_1 telle que

$$\sup_{M_\epsilon} |D^\alpha \varphi| \leq C_1 \epsilon^{k-|\alpha|} \sup_{|\nu|=k} \sup_{M_\epsilon} |D^\nu \varphi| \ \text{ si } \ |\alpha| \leq k.$$

En utilisant l'hypothèse et les majorations des dérivées de χ_ϵ et φ, on obtient

$$\begin{aligned}
|u(\varphi)| = |u(\varphi\chi_\epsilon)| &\leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |D^\alpha(\chi_\epsilon \varphi)| \\
&\leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |\sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta}\chi_\epsilon D^\beta \varphi| \\
&\leq \sup_{|\alpha|\leq k} \sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta C_0 \epsilon^{|\beta|-|\alpha|} C_1 \epsilon^{k-|\beta|} \sup_{|\nu|=k} \sup_{M_\epsilon} |D^\nu \varphi| \\
&\leq C' \sup_{|\nu|=k} \sup_{M_\epsilon} |D^\nu \varphi|.
\end{aligned}$$

Cette majorante converge vers 0 car toutes les dérivées de φ sont uniformément continues dans $\mathbb{R}^n$ et les dérivées d'ordre k sont nulles sur le support de u. Ceci achève la démonstration. □

2.4.4 Distributions à support ponctuel

Le lemme 2.4.7 permet de donner la structure des distributions à support ponctuel.

La réciproque du résultat suivant est bien sûr vraie.

Proposition 2.4.8 *Si u est une distribution dans un ouvert Ω dont le support est réduit à un point $x_0 \in \Omega$, $[u] = \{x_0\}$, alors il existe un naturel positif k et des constantes c_α telles que*

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha D^\alpha \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Les constantes c_α sont uniques.

Preuve. Montrons que si u peut s'écrire de cette manière, alors les coefficients qui interviennent dans la décomposition sont uniques. Supposons donc que

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha D^\alpha \varphi(x_0) \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Cela étant, notons que, quels que soient les multi-indices α, β, on a

$$D^\alpha (x-x_0)^\beta \ = \ D_1^{\alpha_1}(x-x_0)_1^{\beta_1} D_2^{\alpha_2}(x-x_0)_2^{\beta_2} \dots D_n^{\alpha_n}(x-x_0)_n^{\beta_n}.$$

Dès lors d'une part s'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\alpha_j > \beta_j$, on a $D^\alpha(x-x_0)^\beta = 0$. Et d'autre part, si $\alpha_j \leq \beta_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, alors $D^\alpha(x-x_0)^\beta(x_0) \neq 0$ si et seulement si $\beta = \alpha$, auquel cas $D^\beta (x-x_0)^\beta (x_0) = \beta!$. L'idée est donc de pouvoir « faire comme si on évaluait $u_{(x)}\left((x-x_0)^\beta\right)$ ».

Soit donc $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avec $\psi = 1$ dans un voisinage de x_0 et soit aussi un multi-indice β. On va évaluer l'expression

$$u_{(x)}\left(\psi(x)\,(x-x_0)^\beta\right).$$

Quel que soit le multi-indice α, on a

$$D^\alpha\left(\psi(x)\,(x-x_0)^\beta\right) \;=\; \sum_{\gamma\leq\alpha} C_\alpha^\gamma D^{\alpha-\gamma}\psi(x)\, D^\gamma (x-x_0)^\beta;$$

dès lors, comme $D^{\alpha-\gamma}\psi = 0$ au voisinage de x_0 lorsque $\alpha - \gamma \neq 0$, on obtient

$$D^\alpha\left(\psi(x)\,(x-x_0)^\beta\right)(x_0) \;=\; C_\alpha^\alpha D^\alpha (x-x_0)^\beta (x_0) \;=\; D^\alpha (x-x_0)^\beta (x_0).$$

Si β est tel que $|\beta| \leq k$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} u_{(x)}\left(\psi(x)\,(x-x_0)^\beta\right) &= \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha\, D^\alpha\left(\psi(x)\,(x-x_0)^\beta\right)(x_0) \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha\, D^\alpha (x-x_0)^\beta (x_0) \\ &= c_\beta\, D^\beta (x-x_0)^\beta (x_0) \\ &= c_\beta\, \beta!; \end{aligned}$$

les coefficients sont donc uniques.

Etablissons alors l'existence. Puisque on connaît la forme des coefficients s'ils existent, quel que soit le multi-indice α, posons

$$c_\alpha \;=\; u_{(x)}\left(\psi(x)\,(x-x_0)^\alpha\right)/\alpha!$$

avec $\psi \in \mathcal{D}(b)$, b boule fermée centrée en x_0, incluse dans Ω et $\psi = 1$ au voisinage de x_0. Le problème consiste donc à trouver k.

Cela étant, puisque u est une distribution, il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq p} \sup_b |D^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(b).$$

Montrons que $k = p$ convient c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$u(\varphi) \;=\; \sum_{|\alpha|\leq p} c_\alpha D^\alpha \varphi(x_0) \;=\; \sum_{|\alpha|\leq p} D^\alpha \varphi(x_0)\, u_{(x)}\left(\psi(x)\,(x-x_0)^\alpha\right)/\alpha!$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\leq p} D^\alpha\varphi(x_0)\, u_{(x)}\left(\psi(x)\,(x-x_0)^\alpha\right)/\alpha! &= u_{(x)}\left(\sum_{|\alpha|\leq p} D^\alpha\varphi(x_0)\,\psi(x)\,(x-x_0)^\alpha/\alpha!\right)\\ &= u_{(x)}\left(\psi(x)\sum_{|\alpha|\leq p} D^\alpha\varphi(x_0)\,(x-x_0)^\alpha/\alpha!\right).\end{aligned}$$

Cela étant, pour tous multi-indices α, β, pour toute fonction f de classe C_∞ dans Ω et au voisinage de x_0, on a

$$D^\beta\left(\psi(x)\,f(x)\right) = \psi(x)\,D^\beta f(x)$$

en utilisant comme précédemment Leibniz et le fait que ψ vaut 1 au voisinage de x_0. Il s'ensuit alors que pour tout multi-indice β tel que $|\beta|\leq p$ on a

$$\begin{aligned}&D^\beta\left(\psi(x)\sum_{|\alpha|\leq p} D^\alpha\varphi(x_0)\,(x-x_0)^\alpha/\alpha!\right)(x_0)\\ &= \psi(x_0)\sum_{|\alpha|\leq p} D^\alpha\varphi(x_0)\,\left(D^\beta(x-x_0)^\alpha/\alpha!\right)(x_0)\\ &= \psi(x_0)\,D^\beta\varphi(x_0)\\ &= D^\beta\left(\psi\,\varphi\right)(x_0).\end{aligned}$$

On a donc obtenu que les fonctions $\psi\,\varphi$ et

$$x\mapsto \psi(x)\sum_{|\alpha|\leq k}\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}\,D^\alpha\varphi(x_0)$$

appartiennent à $D(b)$ sont égales avec toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k sur le support de u (qui est $\{x_0\}$). Par le lemme 2.4.7, on a donc

$$u_{(x)}\left(\psi(x)\sum_{|\alpha|\leq k}\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}\,D^\alpha\varphi(x_0)\right) = u(\psi\,\varphi).$$

Pour conclure, il suffit de constater que $u(\psi\,\varphi) = u(\varphi)$ car φ et $\psi\varphi$ sont égales au voisinage du support de $[u]$. □

Exemple 2.4.9 *a) Résoudre l'équation $Du = z\delta_0$ où z est un complexe non nul. (Inconnue= u distribution dans $\mathbb{R}$)*

b) Résoudre l'équation $xDu = 1$. (Inconnue= u distribution dans $\mathbb{R}$)

Remarquons que si v est solution de l'équation alors u est solution si et seulement si $v-u$ est solution de l'équation homogène.

a) Vu ce qui précède, on a déjà la solution particulière zu_Y. Les solutions de l'équation homogène $Du=0$ sont les distributions associées aux fonctions constantes. Dès lors, les solutions de l'équation sont les distributions associées aux fonctions $zY+c$ où $c\in\mathbb{C}$.

b) Déterminons les solutions de l'équation homogène associée $xDu=0$.

Si u est une solution, le support de Du est vide ou réduit au singleton [8] $\{0\}$. Il existe donc des constantes $c_0,\ldots,c_k$ telles que

$$Du=\sum_{j=0}^{k}c_jD^j\delta_0.$$

Il vient

$$xDu=-\sum_{j=1}^{k}jc_jD^{j-1}\delta_0=0.$$

Ainsi $c_j=0$ si $j>0$ et $Du=c_0\delta_0$. Les solutions de cette dernière équation sont les distributions associées aux fonctions c_0Y+c où $c\in\mathbb{C}$ (cf le cas précédent). Dès lors, si u est solution de $xDu=0$, il existe donc des constantes c_0,c telles que u soit la distribution associée à la fonction $x\mapsto c_0Y(x)+c$.

Réciproquement, un simple calcul montre que pour toutes constantes c_0,c, la distribution associée à la fonction $x\mapsto c_0Y(x)+c$ est solution de $xDu=0$.

D'autre part, on vérifie directement que la distribution associée à la fonction $x\mapsto\ln(|x|)$ (localement intégrable dans $\mathbb{R}$) vérifie l'équation $xDu=1$.

En conclusion, les solutions de l'équation $xDu=1$ sont les distributions associées aux fonctions $x\mapsto\ln(|x|)+c_0Y(x)+c$, où c_0,c sont des complexes arbitraires.

2.5 Distributions de fonctions paramétriques

Le résultat qui suit est en quelque sorte une généralisation de celui qui donne la dérivabilité des fonctions définies comme des intégrales paramétriques :

$$F\ :\ y\mapsto\int_A f(x,y)\ dx.$$

Dans le présent contexte, l'intégrale est remplacée par une distribution. Ne serait-ce que pour donner un sens à l'expression, il est clair que des hypothèses sur f et sur la distribution doivent être introduites.

8. En effet, supposons que v soit une distribution dans $\mathbb{R}$ telle que $xv=0$ et $[v]\neq\emptyset$. Soit $x_0\in[v]$, $x_0\neq 0$. Il existe alors un voisinage ouvert V de x_0 qui ne contient pas 0. Dès lors, pour tout $\varphi\in D(V)$, la fonction $\psi(x)=\varphi(x)/x$, $x\in\mathbb{R}$ appartient à $D(\mathbb{R})$ et est telle que $(xv)(\psi)=v(\varphi)=0$. Il s'ensuit que $V\subset\mathbb{R}\setminus[v]$, ce qui est absurde car $x_0\in V\cap[v]$.

2.5.1 Dérivation

Théorème 2.5.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On suppose que*
- *u est une distribution dans Ω,*
- *f est de classe C_∞ dans $\Omega \times U$,*
- *$([u] \times K) \cap [f]$ est un compact de $\Omega \times U$ pour tout compact K de U (*).*

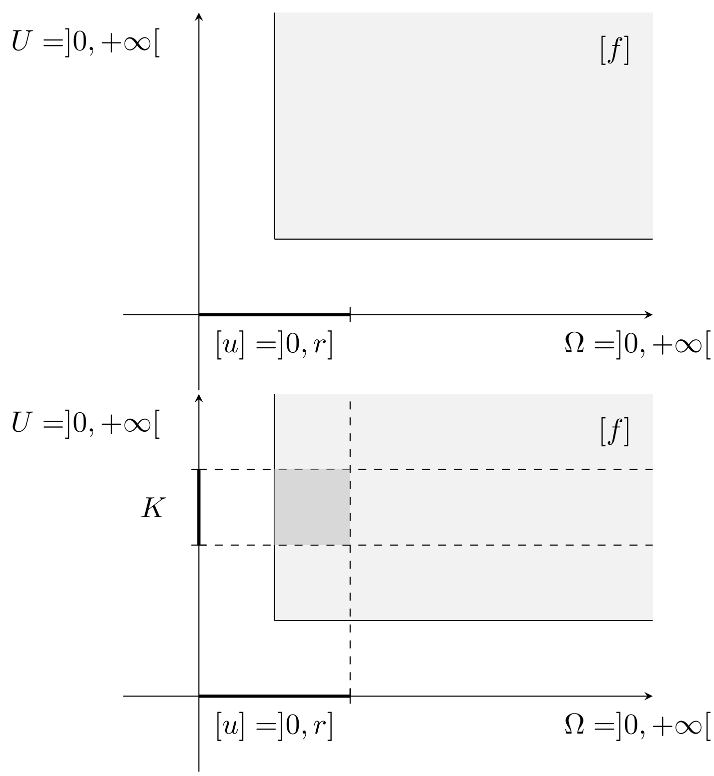
Alors, la fonction $y \to u(f(.,y))$ est de classe C_∞ dans U et

$$D_y^\alpha u(f(.,y)) = u(D_y^\alpha f(.,y))$$

pour tout multi-indice α.

Remarquons que l'hypothèse sur les supports est toujours vérifiée si f ou $[u]$ est à support compact.

Preuve. Illustration de (*).



• Etablissons tout d'abord que l'expression $u(f(.,y))$ est bien définie pout tout $y \in U$. Puisque $f(.,y)$ est de classe C_∞ dans l'ouvert Ω, pour cela, il suffit de prouver (cf précédemment) que l'intersection $[f(.,y)] \cap [u]$ est un compact de $\Omega \times U$.

Si $x \in \Omega$ est tel que $(x,y) \notin [f]$, alors $f(x,y) = 0$ donc

$$\{x \in \Omega : f(x,y) \neq 0\} \subset \{x \in \Omega : (x,y) \in [f]\};$$

comme l'ensemble de droite est un fermé de Ω, on obtient

$$[f(.,y)] \subset \{x \in \Omega : (x,y) \in [f]\}$$

et donc

$$[u] \cap [f(.,y)] \subset \mathrm{pr}_\Omega \Big(([u] \times \{y\}) \cap [f] \Big)$$

où pr_Ω désigne la projection sur Ω. Ce dernier ensemble est compact vu l'hypothèse. Ainsi, la condition de support imposée à u et f assure que $u(f(.,y))$ est défini pour tout $y \in U$, en prenant $\psi_y \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\psi_y = 1$ au voisinage de $\mathrm{pr}_\Omega \Big(([u] \times \{y\}) \cap [f] \Big)$ et en posant

$$u(f(.,y)) \;=\; u\Big(\psi_y(.)\, f(.,y)\Big).$$

Notons que si f est à support compact, alors quel que soit $y \in U$, la fonction $f(.,y)$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ (elle est de classe C_∞ et son support est inclus dans la projection sur Ω du support de f) ; il n'est donc nécessaire de recourir à une fonction intermédiaire ψ_y.

• Dans un premier temps, montrons que la fonction $y \to u(f(.,y))$ est continue dans U.

Soit $y_0 \in U$. La notion de continuité étant locale, il importe d'écrire $u(f(.,y))$ de la même manière pour tout y dans un voisinage de y_0. Soit donc une boule fermée K de centre y_0 incluse dans U. Comme montré ci-dessus, quel que soit y on a

$$[u] \cap [f(.,y)] \subset \mathrm{pr}_\Omega \Big(([u] \times \{y\}) \cap [f] \Big)$$

donc

$$\Big([u] \cap [f(.,y)]\Big) \times \{y\} \subset \Big(([u] \times \{y\}) \cap [f] \Big).$$

Ainsi, pour tout $y \in K$, on a

$$\Big([u] \cap [f(.,y)]\Big) \times \{y\} \subset \Big(([u] \times K) \cap [f] \Big)$$

donc

$$[u] \cap [f(.,y)] \subset \mathrm{pr}_\Omega \Big(([u] \times K) \cap [f] \Big) = K_1.$$

Vu les hypothèses, l'ensemble K_1 est compact. Soit donc $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ égal à 1 au voisinage de K_1. On a ainsi

$$u(f(.,y)) = u\Big(\psi(.) f(.,y)\Big), \quad y \in K.$$

Cela étant, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $y_0 + he_k \in K = b(y_0, r)$, on a

$$f(.,y_0 + he_k) - f(.,y_0) \;=\; \int_0^1 D\left(f(.,y_0 + the_k)\right)\, dt \;=\; h \int_0^1 (D_{y_k} f)(.,y_0 + the_k)\, dt;$$

dès lors, puisque le support des fonctions

$$x \mapsto \psi(x)\, \Big(f(x,y_0 + h) - f(x,y_0)\Big), \quad |h| \le r$$

sont inclus dans le compact $[\psi]$, il existe $C > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned}
\Big|u(f(.,y_0+h)) - u(f(.,y_0))\Big| &= \Big|u\Big(\psi(.)\ \Big(f(.,y_0+h) - f(.,y_0)\Big)\Big)\Big| \\
&= |h|\ \Big|u\Big(\psi(.)\ \Big(\int_0^1 (D_{y_k}f)(.,y_0+the_k)\ dt\Big)\Big)\Big|\ (*) \\
&\leq |h|\, C \sup_{|\alpha|\leq k_0} \sup_{x\in[\psi]} \Big|D_x^\alpha\Big(\psi(x)\ \Big(\int_0^1 (D_{y_k}f)(.,y_0+the_k)\ dt\Big)\Big)\Big| \\
&\leq |h|\, C' \sup_{|\alpha|\leq k_0} \sup_{x\in[\psi], y\in K} |D_x^\alpha D_{y_k} f(x,y)|.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{h\to 0}\Big|u(f(.,y_0+h)) - u(f(.,y_0))\Big| = 0.$$

• Montrons maintenant que $y \to u(f(.,y))$ est dérivable en tout $y_0 \in U$. Soit $k \in \{1,\ldots,n\}$.

En reprenant ψ et h comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{u\Big(f(.,y_0+he_k)\Big) - u(f(.,y_0))}{h} - u\Big(D_{y_k}f(.,y_0)\Big) \\
&= \frac{u\Big(\psi(.)\Big(f(.,y_0+he_k) - f(.,y_0) - hD_{y_k}f(.,y_0)\Big)\Big)}{h}.
\end{aligned}$$

Comme dans le cas de la continuité, on ré-écrit les fonctions en lesquelles évaluer u en passant à une intégrale ; ici on utilise le développement intégral de Taylor à l'ordre 2, à savoir

$$f(x,y_0+he_k) - f(x,y_0) - hD_{y_k}f(x,y_0) = h^2\int_0^1 (1-t)(D_{y_k}^2 f)(x,y_0+the_k)dt.$$

Un facteur h va disparaître avec le dénominateur h mais il en reste encore un ! Le preuve suit alors exactement la même trame que dans le cas de la continuité (*). On obtient donc finalement

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left(\frac{u\Big(f(.,y_0+he_k)\Big) - u(f(.,y_0))}{h} - u\Big(D_{y_k}f(.,y_0)\Big)\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u\Big(\psi(.)\Big(f(.,y_0+he_k) - f(.,y_0) - hD_{y_k}f(.,y_0)\Big)\Big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} h\, u\Big(\psi(.)\ \Big(\int_0^1 (1-t)(D_{y_k}^2 f)(x,y_0+the_k)\ dt\Big)\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$D_{y_k} u(f(.,y)) = u(D_{y_k} f(.,y)).$$

Par ce qui précède, ces dérivées sont continues dans U.

• On obtient le théorème en itérant le résultat. □

2.5.2 Intégration

Il est également possible de permuter l'application d'une distribution et d'une intégrale.

Théorème 2.5.2 *On conserve les hypothèses du théorème 2.5.1. Pour tout compact K de U, on a*

$$\int_K u(f(.,y))\,dy = u\left(\int_K f(.,y)\,dy\right).$$

Preuve. Notons tout d'abord que les deux membres de l'égalité ont un sens.

De fait, d'une part, vu ce qui précède, la fonction $y \mapsto u(f(.,y))$ est continue sur U donc intégrable sur tout compact de cet ouvert.

D'autre part, quel que soit $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue sur U donc intégrable sur tout compact de cet ouvert. De plus, la fonction $x \mapsto \int_K f(x,y)\,dy$ appartient à $C_\infty(\Omega)$ (dérivation des intégrales paramétriques) ; et par ailleurs on a bien sûr

$$\left\{x \in \Omega \ : \ \int_K f(.,y)\,dy \ \neq \ 0\right\} \subset \Big\{x \in \Omega : \exists\, y \in K \ t.q. \ (x,y) \in [f]\Big\}.$$

On montre directement que l'ensemble à droite de l'inclusion est un fermé de Ω et donc finalement

$$\left[\int_K f(.,y)\,dy\right] \subset \Big\{x \in \Omega : \exists\, y \in K \ t.q. \ (x,y) \in [f]\Big\}.$$

Il s'ensuit que

$$[u] \cap \left[\int_K f(.,y)\,dy\right] \subset \Big\{x \in [u] : \exists\, y \in K \ t.q. \ (x,y) \in [f]\Big\} \subset \mathrm{pr}_\Omega\left(([u] \times K) \cap [f]\right) = K_1.$$

Vu les hypothèses, on en déduit donc que $[u] \cap \left[\int_K f(.,y)\,dy\right]$ est compact et on peut donc utiliser « l'extension par support » (cf la sous-section 2.4.2), qui permet finalement de donner un sens au membre de droite.

Choisissons maintenant une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K_1. Le second membre de l'égalité à prouver est donc égal à

$$u\left(\psi(.) \int_K f(.,y)\,dy\right).$$

De plus, que que soit $y \in K$, on a

$$[u] \cap [f(.,y)] \subset K_1$$

donc la même fonction ψ peut convenir pour expliciter la fonction à intégrer dans le premier membre :

$$\int_K u(f(.,y))\,dy \;=\; \int_K u(\psi(.)f(.,y))\,dy.$$

On doit donc prouver que

$$\int_K u(\psi(.)f(.,y))\,dy \;=\; u\left(\psi(.)\int_K f(.,y)\,dy\right).$$

Pour tout entier positif m, soit $e_k^{(m)}$, $0 \leq k \leq M_m$, une partition finie de K en ensembles mesurables tels que $diam(e_k^{(m)}) \leq \epsilon_m$ où la suite ϵ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0 si m tend vers l'infini. On choisit également des points $y_k^{(m)} \in e_k^{(m)}$. Par l'interprétation de Riemann de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}
\int_K u\left(\psi(.)(f(.,y)\right)dy &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{M_m} u\left(\psi(.)f(.,y_k^{(m)})\right) mes(e_k^{(m)}) \\
&= \lim_{m\to+\infty} u\left(\psi(.)\sum_{k=0}^{M_m} f(.,y_k^{(m)}) mes(e_k^{(m)})\right).
\end{aligned}$$

Si on définit les fonctions g_m ($m \in \mathbb{N}_0$) par

$$g_m(.) \;=\; \psi(.)\sum_{k=0}^{M_m} f(.,y_k^{(m)}) mes(e_k^{(m)})$$

il suffit donc de montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} g_m(.) \;=\; \psi(.)\int_K f(.,y)dy$$

dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Les supports de toutes ces fonctions g_m étant inclus dans le support de ψ, il reste donc à voir que la suite g_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers $\psi(.)\int_K f(.,y)dy$ uniformément sur le support de ψ avec toutes les dérivées. Vu la forme des g_m et de la limite, la formule de Leibniz (et le théorème de dérivation des intégrales paramétriques) permettent de dire qu'il suffit de montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{x\in[\psi]} \left| D_x^\alpha \left(\sum_{k=0}^{M_m} f(x,y_k^{(m)}) mes(e_k^{(m)})\right) - \int_K D_x^\alpha f(x,y)dy \right| \;=\; 0$$

pour tout multi-indice α.

On a successivement

$$\begin{aligned}
& D_x^\alpha\left(\sum_{k=0}^{M_m} f(x,y_k^{(m)})mes(e_k^{(m)})\right) - \int_K D_x^\alpha f(x,y)dy \\
= & \left(\sum_{k=0}^{M_m} D_x^\alpha f(x,y_k^{(m)})mes(e_k^{(m)})\right) - \int_K D_x^\alpha f(x,y)dy \\
= & \left(\sum_{k=0}^{M_m} \int_{e_k^{(m)}} D_x^\alpha f(x,y_k^{(m)})dy\right) - \int_K D_x^\alpha f(x,y)dy \\
= & \sum_{k=0}^{M_m} \int_{e_k^{(m)}} D_x^\alpha f(x,y_k^{(m)})dy - \sum_{k=0}^{M_m} \int_{e_k^{(m)}} D_x^\alpha f(x,y)dy \\
= & \sum_{k=0}^{M_m} \int_{e_k^{(m)}} \left(D_x^\alpha f(x,y_k^{(m)}) - D_x^\alpha f(x,y)\right) dy.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \sup_{x\in[\psi]} \left| D_x^\alpha\left(\sum_{k=0}^{M_m} f(x,y_k^{(m)})mes(e_k^{(m)})\right) - \int_K D_x^\alpha f(x,y)dy \right| \\
\leq & \sum_{k=0}^{M_m} \int_{e_k^{(m)}} \sup_{x\in[\psi]} \left| D_x^\alpha f(x,y_k^{(m)}) - D_x^\alpha f(x,y)\right| dy \\
\leq & \sum_{k=0}^{M_m} \int_{e_k^{(m)}} dy \sup_{x\in[\psi],|z'-z|\leq\varepsilon_m,z',z\in K} \left| D_x^\alpha f(x,z) - D_x^\alpha f(x,z')\right| \\
= & \; mes(K) \sup_{x\in[\psi],|z'-z|\leq\varepsilon_m,z',z\in K} \left| D_x^\alpha f(x,z) - D_x^\alpha f(x,z')\right|
\end{aligned}$$

Cette expression converge vers 0 si m tend vers l'infini car les dérivées de f sont uniformément continues dans tout compact de $\Omega \times U$. □

2.5.3 Quelques conséquences

Ecrivons $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''} = \mathbb{R}^n$. Si $\varphi' \in D(\mathbb{R}^{n'})$ et $\varphi'' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n''})$, la fonction $\varphi' \otimes \varphi'' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$(\varphi' \otimes \varphi'')(x) = \varphi'(x')\,\varphi''(x'').$$

On a directement

$$[\varphi' \otimes \varphi''] = [\varphi'] \times [\varphi''].$$

Proposition 2.5.3 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $u(\varphi' \otimes \varphi'') = 0$ pour tous $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n'})$ et $\varphi'' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n''})$ tels que $[\varphi' \otimes \varphi''] \subset \Omega$ alors $u = 0$.*

Preuve. Soient $\psi' \in D(\mathbb{R}^{n'})$ et $\psi'' \in D(\mathbb{R}^{n''})$ des fonctions d'intégrales égales à 1 dont le support est inclus dans la boule unité. Posons $\psi = \psi' \otimes \psi''$ et $\psi_m(x) = m^n \psi(mx)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En vertu de l'exemple 2.1.4 de la sous-section 2.1.2, les fonctions $\varphi * \psi_m$ appartiennent à $\mathcal{D}(\Omega)$ pour m assez grand et convergent vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. On a donc

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \lim_{m\to+\infty} u(\varphi * \psi_m) \\ &= \lim_{m\to+\infty} u\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi_m(. - y)\, dy\right) \\ &= \lim_{m\to+\infty} u\left(\int_{[\varphi]} \varphi(y)\psi_m(. - y)\, dy\right). \end{aligned}$$

Cela étant, vérifions que l'on peut permuter l'intégrale et l'application de la distribution (théorème 2.5.2) : quel que soit m, la fonction $F : (x, y) \mapsto \varphi(y)\psi_m(x - y)$ appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et son support est inclus dans le compact $([\psi_m] + [\varphi]) \times [\varphi]$; les hypothèses sont donc vérifiées. Ainsi on obtient

$$u(\varphi) = \lim_{m\to+\infty} \int_{[\varphi]} \varphi(y)\ u\left(\psi_m(. - y)\right)\, dy.$$

Comme on a $\psi_m(x - y) = \psi'_m(x' - y')\psi''_m(x'' - y'')$, pour conclure que $u(\varphi) = 0$, il reste à s'assurer que quel que soit $y \in [\varphi]$, la fonction $x \mapsto \psi_m(x - y) = \psi'_m(x' - y')\psi''_m(x'' - y'')$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ pour m assez grand. Et c'est le cas car on a $[\psi_m(. - y)] \subset y + [\psi_m] \subset [\varphi] + [\psi_m]$ avec $[\varphi]$ compact inclus dans Ω et vu la particularité des supports des ψ'_m, ψ''_m.
□

Le théorème 2.5.2 (permutation de l'intégrale et de l'application de la distribution) nous permet aussi d'établir un **théorème de structure des distributions à support compact**. Avant d'en donner l'énoncé et la preuve, établissons une propriété (immédiate mais très utile) de majoration de continuité pour les distributions à support compact. Nous nous en servirons tout de suite ici et encore plus loin, lors de l'étude du théorème de Paley-Wiener.

Propriété 2.5.4 (Maj. de continuité pour les distr. à support compact) *Soit u une distribution dans $\mathbb{R}^n$ à support compact. Alors il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ et des constantes C, N telles que*

$$|u(f)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_K |D^\alpha f| \ \ \textit{pour tout}\ f \in C_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Soit une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 au voisinage du compact $[u]$. Quel que soit $f \in \mathbb{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$, on peut alors définir (cf « l'extension par support »)

$$u(f) \ := \ u(f\psi).$$

Cela étant, il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|u(\varphi)| \; \leq \; C \sup_{\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi| \,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([\psi]).$$

Ainsi, quel que soit $f \in \mathbb{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$, on a $f\psi \in \mathcal{D}([\psi])$ donc

$$\begin{aligned} |u(f)| = |u(f\psi)| \;\; &\leq \;\; C \sup_{\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha (f\psi)| \\ &= \;\; C \sup_{[\psi]} \sup_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha (f\psi)| \\ &\leq \;\; C' \, C \sup_{[\psi]} \sup_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f| \end{aligned}$$

□

Passons maintenant à l'énoncé du théorème de structure annoncé.

Théorème 2.5.5 *Si u est une distribution à support compact dans $\mathbb{R}^n$, il existe un multi-indice α et une fonction continue f dans $\mathbb{R}^n$ tels que*

$$u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, D^\alpha \varphi(x) \, dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Avant de se lancer dans la preuve, illustrons le résultat dans $\mathbb{R}$ avec une distribution à support ponctuel $\{0\}$, à savoir une distribution du type

$$\sum_{j=0}^{J} c_j D^j \delta_0.$$

Par abus de langage, si f est une fonction localement intégrable, on écrira $D^k f$ au lieu de $D^k u_f$ où u_f est la distribution associée à f.

Considérons δ_0. Si $Y = \chi_{[0,+\infty[} = e_1$ (échelon de Heaviside), on a $DY = \delta_0$. Mais Y n'est pas continu ...Par contre, ses primitives le sont ; ainsi, en posant $e_2(x) = x\chi_{[0,+\infty[}(x)$, on a $De_2 = e_1$ et par suite

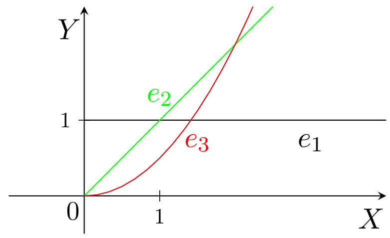
$$D^2 e_2 = \delta_0 \quad \text{avec} \quad e_2 \in C_0(\mathbb{R}).$$

Considérons ensuite $D\delta_0$. On a $D^3 e_2 = D\delta_0$. On a donc bien sûr $c_0 D^2 e_2 + c_1 D^3 e_2 = c_0 \delta_0 + c_1 D\delta_0$. Mais vu le théorème, on doit parvenir à trouver une seule fonction f à dériver avec le même ordre ! Pour cela, il suffit alors de primitiver e_2 : avec $e_3(x) = x^2/2 \, \chi_{[0,+\infty[}(x)$, on obtient

$$c_0 \delta_0 + c_1 D\delta_0 \; = \; D^3 f$$

avec

$$f = c_0 e_3 + c_1 e_2 \; \in \; C_0(\mathbb{R}).$$



Pour le cas de $\sum_{j=0}^{J} c_j D^j \delta_0$, il est donc clair qu'on arrivera à nos fins en prenant des primitives successives de $e_1 = Y$. Ecrivons les formes explicites obtenues car ce genre de manipulation va servir pour prouver le théorème dans toute sa généralité.

Propriété 2.5.6 (Résultat auxiliaire) *Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons*

$$e_m(x) \;=\; \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,\chi_{[0,+\infty[}(x).$$

On a les propriétés suivantes.

1. *Quels que soient $p, q \in \mathbb{N}_0$, on a $e_p * e_q = e_{p+q}$ partout.*
2. *Pour tout naturel $m \geq 2$, on a $e_m \in C_{m-2}(\mathbb{R})$ et pour tout naturel $p \leq m-2$, on a*

$$D^p e_m \;=\; e_{m-p}.$$

3. *Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, au sens distribution on a*

$$D^{m-1} e_m = e_1 \quad \text{et} \quad D^m e_m = \delta.$$

4. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$D^m\,(e_m * \varphi) \;=\; \varphi.$$

Preuve. 1. Notons que le produit de composition $(e_p * e_q)(y)$ existe pour tout y car la fonction

$$\begin{aligned} x \mapsto x^{p-1}\,(y-x)^{q-1}\,\chi_{[0,+\infty[}(x)\,\chi_{[0,+\infty[}(y-x) \;&=\; x^{p-1}\,(y-x)^{q-1}\,\chi_{[0,+\infty[\cap]-\infty,y]}(x) \\ &=\; \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ x^{p-1}\,(y-x)^{q-1}\,\chi_{[0,y]}(x) & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

est intégrable.

Cela étant, pour $y \geq 0$, on a

$$(e_p * e_1)(y) \;=\; \int_0^y e_p(x)\,dx \;=\; \frac{1}{p!}\int_0^y Dx^p\,dx \;=\; \frac{y^p}{p!}$$

et dès lors

$$e_p * e_1 \ = \ e_{p+1}.$$

Ainsi, quel que soit $q \in \mathbb{N}_0$ on obtient successivement

$$\begin{array}{rcl} e_p * e_q & = & e_p * (e_1 * e_{q-1} \\ & = & (e_p * e_1) * e_{q-1}) \\ & = & e_{p+1} * e_{q-1} \\ & = & \ldots \\ & = & e_{p+q-1} * e_1 \\ & = & e_{p+q}. \end{array}$$

2. Comme on a

$$e_m(y) \ = \ (e_{m-1} * e_1)(y) \ = \ \int_0^y e_{m-1}(x)\, dx$$

si $y \geq 0$ et $e_m(y) = (e_{m-1} * e_1)(y) = 0$ si $y < 0$, on constate directement que e_m est la primitive de e_{m-1} qui s'annule en 0.

On conclut alors par récurrence. De fait par une vérification immédiate on a $e_2 \in C_0(\mathbb{R})$ et $e_3 \in C_1(\mathbb{R})$. Si maintenant on suppose que $e_m \in C_{m-2}$ alors e_{m+1} étant une primitive de e_m, on obtient que $e_{m+1} \in C_{m-1}(\mathbb{R})$ et on conclut.

L'expression de $D^p e_m$ est alors aussi directe à obtenir vu les liens de primitivations : on a $e_m \in C_{m-2}(\mathbb{R})$ donc pour tout $p \leq m-2$ on obtient

$$D^p e_m = D^{p-1} D e_m = D^{p-1} e_{m-1} = \ldots = e_{p-m}.$$

3. On a (cf calculs de l'illustration du théorème)

$$D^{m-1} u_{e_m} \ = \ D u_{D^{m-2} e_m} = D u_{e_2} = u_{e_1}$$

et

$$D^m u_{e_m} = D u_{e_1} = \delta_0.$$

4. Quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ le produit de composition $e_m * \varphi$ appartient bien sûr à $C_\infty(\mathbb{R})$ et on a successivement (à comparer avec ce qui sera obtenu lors de l'étude du produit de composition d'une distribution et d'une fonction)

$$\begin{aligned}
D^m\left(e_m * \varphi\right)(y) &= D^2\left(\left(D^{m-2}e_m\right) * \varphi\right)(y)\\
&= D^2(e_2 * \varphi)(y)\\
&= (e_2 * D^2\varphi)(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}} (y-x)\,\chi_{[0,+\infty[}(y-x)\,D^2\varphi(x)\;dx\\
&= \int_{-\infty}^{y} (y-x)\,D^2\varphi(x)\;dx\\
&= \int_{-\infty}^{y} D\varphi(x)\;dx\\
&= \varphi(y).
\end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 2.5.5. **(structure des distributions à support compact)**
Faisons la preuve dans le cas $n = 1$. Le cas général s'obtient de la même manière en remplaçant les e_m par

$$e_\mu(x) = \frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\,\chi_{]0,+\infty[\times\cdots\times]0,+\infty[}(x)$$

avec, par convention, $\mu - 1 = (\mu_1 - 1, \ldots, \mu_n - 1)$.

Regardons tout d'abord comment on pourrait faire, en se servant du résultat auxiliaire 2.5.6. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $m \in \mathbb{N}_0$. On a

$$\begin{aligned}
u(\varphi) &= u\left(D^m(e_m * \varphi)\right)\\
&= u\left(e_m * D^m\varphi\right)\\
&= u\left(\int_{\mathbb{R}} e_m(.-y)\,D^m\varphi(y)\;dy\right)\\
&= u\left(\int_{[\varphi]} e_m(.-y)\,D^m\varphi(y)\;dy\right).
\end{aligned}$$

Vu la dernière expression, on est tenté de permuter l'application de l'intégrale et de la distribution ...mais on est arrêté rien que par le fait que la fonction e_m n'est pas indéfiniment continûment dérivable ...(la distribution étant à support compact, l'hypothèse sur les support est vérifiée) Ce développement donne tout de même une idée : on sait que l'on peut « régulariser » des fonctions en se servant d'unités approchées de composition.

Soit donc $\psi \in D(\mathbb{R})$ une fonction d'intégrale 1 et dont le support est inclus dans la boule unité. Posons $\psi_k(x) = k\psi(kx)$. En vertu de l'exemple 2.1.4 (convergence dans $\mathcal{D}$) et du résultat auxiliaire (comme au début de cette preuve), on a, quel que soient $m \in \mathbb{N}_0$ et

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \lim_{k\to+\infty} u\left(\varphi * \psi_k\right) \\ &= \lim_{k\to+\infty} u\left(D^m(e_m * \varphi * \psi_k)\right) \\ &= \lim_{k\to+\infty} u\left(D^m((e_m * \psi_k) * \varphi\right) \\ &= \lim_{k\to+\infty} u\left((e_m * \psi_k) * D^m\varphi\right) \\ &= \lim_{k\to+\infty} u\left(\int_{[\varphi]} (e_m * \psi_k)(.-y) D^m\varphi(y)dy\right). \end{aligned}$$

Maintenent, comme u est à support compact et que la fonction de deux variables $(x, y) \mapsto (e_m * \psi_k)(x-y)D^m\varphi(y)$ appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^2)$, on peut appliquer le théorème 2.5.2 (permutation de l'application d'une intégrale et d'une distribution), on obtient encore

$$u(\varphi) = \lim_{k\to+\infty} \int_{[\varphi]} u\left((e_m * \psi_k)(.-y)\right) D^m\varphi(y)dy.$$

Il reste donc à démontrer que pour au moins un m la suite de fonctions $f_k^{(m)}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ définies par

$$y \mapsto f_k^{(m)}(y) = u\left((e_m * \psi_k)(.-y)\right)$$

convergent uniformément dans tout compact vers une fonction continue f. On utilise pour cela le critère de Cauchy de la convergence uniforme.

Puisque la distribution u est à support compact, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ et des constantes C, N telles que

$$|u(f)| \leq C \sup_{\alpha\leq N} \sup_K |D^\alpha f| \;\text{ pour tout } f \in C_\infty(\mathbb{R}).$$

Si K_1 est un compact de $\mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} \sup_{y\in K_1} \left|f_r^{(m)}(y) - f_s^{(m)}(y)\right| &= \sup_{y\in K_1} |u\left((e_m * \psi_r)(.-y) - (e_m * \psi_s)(.-y)\right)| \\ &\leq C \sup_{y\in K_1} \sup_{\alpha\leq N} \sup_{x\in K} \left|D_x^\alpha\left((e_m * \psi_r)(x-y) - (e_m * \psi_s)(x-y)\right)\right| \\ &\leq C \sup_{\alpha\leq N} \sup_{K-K_1} |e_{m-\alpha} * \psi_r - e_{m-\alpha} * \psi_s| \end{aligned}$$

lorsque $m-2 \geq N$. Les fonctions $e_{m-\alpha}$ étant continues dans $\mathbb{R}$ pour tout α vérifiant $\alpha \leq N$, les fonctions $e_{m-\alpha} * \psi_k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ convergent donc uniformément vers $e_{m-\alpha}$ dans tout compact de $\mathbb{R}^n$ si $\alpha \leq N$. Ceci prouve que les fonctions $f_k^{(m)}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ vérifient le critère de Cauchy de la convergence uniforme. D'où la conclusion. □

2.6 Limites de distributions

Le résultat que l'on a en vue ici est celui-ci.

Théorème 2.6.1 *Si u_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite de distributions dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ telle que la limite*

$$u(\varphi) = \lim_{m \to +\infty} u_m(\varphi)$$

existe est est finie pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De plus, si K est un compact de Ω, il existe des constantes C, k, telles que

$$|u_m(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K),$$

pour tout m.

L'énoncé est donc court [9] mais sa preuve est ... longue et repose soit sur un théorème fondamental de l'analyse fonctionnelle (théorème de Banach- Steinhaus) soit sur la technique des « la bosse mobile », qui est elle standard, technique, mais ne fait pas appel à des résultats « extérieurs ».

Les preuves sont en annexe.

Donnons quelques exemples.

1) Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\epsilon > 0$, posons

$$\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \psi(x/\epsilon)$$

et $u_\epsilon = u_{\psi_\epsilon}$. On a

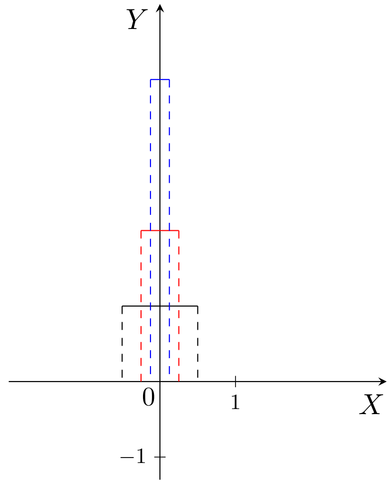
$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0+} u_\epsilon(\varphi) &= \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\epsilon(x) \varphi(x) dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \varphi(\epsilon x) dx = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$\lim_{\epsilon \to 0+} u_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx \times \delta_0.$$

Ceci est à comparer avec la construction standard des unités approchées de composition (cf cours « Introduction à l'analyse harmonique » MATH0511). Dans le cadre des fonctions, on a effectivement vu (cf MATH0511) qu'il n'y avait pas de « neutre » pour le produit de composition mais les unités approchées de composition jouaient en quelque sorte ce rôle. Dans le présent exemple la forme des ψ_ϵ en fait une unité approchée de composition (pour autant que $\psi \geq 0$ et soit d'intégrale égale à 1). Au sens distribution, on a la convergence vers δ_0 et on verra dans le chapitre consacré au produit de composition qu'en fait δ_0 joue effectivement le rôle de neutre : $u * \delta = u$ quelle que soit la distribution u dans $\mathbb{R}^n$.

9. en termes d'analyse fonctionnelle : la limite faible d'une suite de distributions est une distribution



2) Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que [10]

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \psi(x)dx = 0 \quad \text{si} \quad |\alpha| < k.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, posons

$$u_\epsilon(\varphi) = \epsilon^{-n-k} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \varphi(x)dx \ , \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Notons que

$$u_\epsilon(\varphi) = \epsilon^{-k} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(\epsilon x)dx.$$

Cela étant, la formule intégrale de Taylor dans $\mathbb{R}^n$ pour $f \in C_p(\mathbb{R}^n)$ nous dit que [11] quels que soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, en posant $y - x = h$, on a

$$f(y) \ = \ \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{|\alpha|=j} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x) + k \sum_{|\alpha|=p} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} (D^\alpha f)(x+th) \ dt.$$

Pour tous $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $\epsilon > 0$ on obtient donc

$$\varphi(\epsilon x) \ = \ \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=j} \frac{(\epsilon x)^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha \varphi)(0) + p \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\epsilon x)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} (D^\alpha \varphi)(t\epsilon x) \ dt$$

10. Voir l'annexe pour une construction standard d'une telle fonction.
11. Voir l'annexe pour une preuve.

Ainsi

$$\begin{aligned}
u_\epsilon(\varphi) &= \epsilon^{-k}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(\epsilon x)dx\\
&= k\sum_{|\alpha|=k}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\,\psi(x)\left(\int_0^1(1-t)^{k-1}(D^\alpha\varphi)(t\epsilon x)dt\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Pour tous $t\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}^n$, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0}(D^\alpha\varphi)(t\epsilon x) \;=\; (D^\alpha\varphi)(0)$$

et on a donc envie de passer à la limite ≪ à travers tout ≫. Cela va s'effectuer sans problème vu $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. De fait, on a

$$k\int_0^1(1-t)^{k-1}\;dt \;=\; -\int_0^1 D(1-t)^k\;dt \;=\; 1$$

donc

$$k\int_0^1(1-t)^{k-1}(D^\alpha\varphi)(t\epsilon x)\;dt-(D^\alpha\varphi)(0)=\int_0^1 k(1-t)^{k-1}\Big((D^\alpha\varphi)(t\epsilon x)-(D^\alpha\varphi)(0)\Big)\;dt.$$

Notons $F(x,\epsilon,\alpha)$ l'expression ci-dessus. Comme $D^\alpha\varphi$ est uniformément continu sur tout compact, on a $\lim_{\epsilon\to 0}F(.,\epsilon,\alpha)=0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ et on conclut donc que

$$\lim_{\epsilon\to 0}u_\epsilon(\varphi)=\sum_{|\alpha|=k}c_\alpha(D^\alpha\delta_0)(\varphi)$$

avec

$$c_\alpha=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\psi(x)\;dx.$$

3) Soit k un entier positif. Pour tout $m\div in\mathbb{N}_0$, posons

$$u_m(\varphi)=m^k\int_{\mathbb{R}}e^{imx}\varphi(x)dx\;,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{I\!R}).$$

Pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
u_m(\varphi) &= m^{k-1}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{i}D_x(e^{imx})\varphi(x)dx=im^{k-1}\int_{\mathbb{R}}e^{imx}D\varphi(x)dx\\
&= \cdots=i^k\int_{\mathbb{R}}e^{imx}D^k\varphi(x)dx\to 0
\end{aligned}$$

si $m\to+\infty$ en vertu du théorème de Riemann-Lebesgue.

4) Posons

$$\psi_m(x) = me^{imx} \text{ si } x > 0 \ \text{ et } \ \psi_m(x) = 0 \text{ si } x \leq 0.$$

On a ici

$$\begin{aligned} u_m(\varphi) &= \int_0^{+\infty} me^{imx}\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{i}\, D_x(e^{imx})\varphi(x)dx \\ &= i\varphi(0) + i\int_0^{+\infty} e^{imx} D\varphi(x)dx \to i\varphi(0) \end{aligned}$$

si $m \to +\infty$ (encore en vertu du théorème de Riemann-Lebesgue). Ainsi $u_m \to i\delta_0$.

Chapitre 3

Produit de composition

L'objet de ce chapitre est de montrer que le produit de composition possède une extension naturelle aux distributions. Elle sera abondamment utilisée dans le chapitre 5.

3.1 Fermés composables

Le produit de composition de deux distributions peut être défini lorsque leurs supports sont composables au sens suivant.

Définition 3.1.1 *Soit p un entier strictement positif. Des fermés non vides $F_1, \ldots, F_p$ de $\mathbb{R}^n$ sont dits composables si*

$$\{(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p : x_1 + \ldots + x_p \in K\}$$

est compact pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$.

Dès lors, les fermés $F_1, \ldots, F_p$ sont composables si et seulement si les fermés $F_{\pi(1)}, \ldots, F_{\pi(p)}$ sont composables pour toute permutation π de $\{1, \ldots, p\}$.

Proposition 3.1.2 *1) Deux fermés F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^n$ sont composables si et seulement si $F_1 \cap (K - F_2)$ est compact pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que pour tout compact K et tout fermé F de $\mathbb{R}^n$, les fermés K, F sont composables.*

2) Si $F_1, \ldots, F_p$ sont composables alors
(i) $F_1 + \ldots + F_p$ est fermé,
(ii) $F_1, \ldots, F_p, K$ sont composables pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$,
(iii) $F_1, \ldots, F_{p-1}$ sont composables (avec $p > 1$),
(iv) $F_1, F_2, \ldots, F_{p-2}, F_{p-1} + F_p$ sont composables (avec $p > 1$).

Preuve. Ceci relève de la topologie générale. Plusieurs démonstrations sont possibles, d'autant plus que l'on est dans $\mathbb{R}^n$.

1) On a d'une part

$$\{(x_1,x_2)\in F_1\times F_2 : x_1+x_2\in K\}\subset (F_1\cap(K-F_2)\times(K-(F_1\cap(K-F_2)).$$

Dès lors, si $F_1\cap(K-F_2)$ est compact, les fermés F_1 et F_2 sont composables.

Réciproquement, si K est un compact, le fermé $F_1\cap(K-F_2)$ est inclus dans la première projection de

$$\{(x,y)\in F_1\times F_2 : x+y\in K\};$$

d'où la conclusion.

2) Supposons que $F_1,\ldots,F_p$ soient composables.

Prouvons (i). Soit $(x_m)_{m\geq 1}$ une suite de $F_1+\ldots+F_p$ qui converge vers un point x. Ecrivons $x_m=x_m^{(1)}+\ldots+x_m^{(p)}$ avec $x_m^{(j)}\in F_j$ pour tout j. La suite x_m étant convergente, $K=\{x\}\cup\{x_m : m\geq 1\}$ est compact. Vu l'hypothèse, toutes les suites $x_m^{(j)}$ possèdent des sous-suites convergentes vers des points $x_j\in F_j$. On a $x=x_1+\ldots+x_p\in F_1+\ldots+F_p$.

Le point (ii) résulte de l'inclusion

$$\{(x_1,\ldots,x_p,x)\in F_1\times\ldots\times F_p\times K : x_1+\ldots+x_p+x\in M\}$$

$$\subset\{(x_1,\ldots,x_p)\in F_1\times\ldots\times F_p : x_1+\ldots+x_p\in M-K\}\times K.$$

Le point (iii) résulte du fait que si $y_p\in F_p$, l'ensemble

$$\{(x_1,\ldots,x_{p-1})\in F_1\times\ldots\times F_{p-1} : x_1+\ldots+x_{p-1}\in K\}$$

est inclus dans la projection sur les $p-1$ premières variables de

$$\{(x_1,\ldots,x_p)\in F_1\times\ldots\times F_p : x_1+\ldots+x_p\in y_p+K\}.$$

Pour le point (iv), on remarque que

$$\{(x_1,\ldots,x_{p-1})\in F_1\times\ldots\times(F_{p-1}+F_p) : x_1+\ldots+x_{p-1}\in K\}$$

est l'image de

$$\{(x_1,\ldots,x_p)\in F_1\times\ldots\times F_p : x_1+\ldots+x_p\in K\}$$

par l'application continue $(x_1,\ldots,x_p)\mapsto(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1}+x_p)$. □

3.2 Composition d'une distribution et d'une fonction

Définition 3.2.1 *Soient $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi\in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Si les fermés $[u]$ et $[\varphi]$ sont composables, le produit de composition de u et φ est la fonction $u*\varphi$ définie dans $\mathbb{R}^n$ par*

$$(u*\varphi)(x)=u(\varphi(x-.)).$$

On dit que u et φ sont composables.

Puisque $[u] \cap [\varphi(x-.)] = [u] \cap (x - [\varphi])$ est compact pour tout x, $u * \varphi$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et la définition ci-dessus a bien un sens.

Cette définition étend le produit de composition de deux fonctions.

Propriété 3.2.2 *Si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sont tels que $[f]_{pp}$ et $[g]_{pp}$ soient composables, alors f et g sont composables et $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Si en outre $g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et on a $u_f * g = f * g$.

Preuve. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Si $x \in K$, on a

$$\begin{aligned} f(.)g(x-.) &= f\chi_{[f]_{pp} \cap (x-[g]_{pp})}(.) g\chi_{[g]_{pp} \cap (x-[f]_{pp})}(x-.) \\ &= f\chi_{[f]_{pp} \cap (K-[g]_{pp})}(.) g\chi_{[g]_{pp} \cap (K-[f]_{pp})}(x-.). \end{aligned}$$

Dès lors, comme $f\chi_{[f]_{pp} \cap (K-[g]_{pp})}$ et $g\chi_{[g]_{pp} \cap (K-[f]_{pp})}$ sont composables (ce sont des éléments de $L^1(\mathbb{R}^n)$ et que leur produit de composition est intégrable dans $\mathbb{R}^n$, on conclut en ce qui concerne la première partie.

Si en outre $g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, le produit de composition existe pour tout x et le théorème des intégrales paramétriques permet de conclure.

Enfin, pour $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égal à 1 au voisinage de $[f]_{pp} \cap (x - [g])$, on a

$$\begin{aligned} (u_f * g)(x) = u_f(g(x-.)) &= u_f\Big(h(.)g(x-.)\Big) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(y)f(y)g(x-y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\, dy \\ &= (f*g)(x). \end{aligned}$$

□

On a aussi directement les propriétés suivantes.

Propriété 3.2.3 *a) On a $\delta_0 * \varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

b) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $(u*\varphi)(0) = u(\tilde{\varphi})$ avec $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. En particulier, si $u*\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors $u = 0$.

Théorème 3.2.4 *Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ sont composables, alors*

1. *$u * \varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$,*
2. *$D^\alpha(u*\varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * D^\alpha \varphi$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,*
3. *$[u * \varphi] \subset [u] + [\varphi]$,*
4. *si en outre $\psi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $[u]$, $[\varphi]$, $[\psi]$ sont composables alors $(u*\varphi)*\psi = u*(\varphi*\psi)$.*

Preuve. 1. et 2. La fonction $u*\varphi$ est de classe C_∞ en vertu du théorème 2.5.1 (dérivation de distributions de fonctions paramétriques). Seule l'hypothèse concernant les supports n'est pas immédiate. Posons $\Phi(y,x) = \varphi(x-y)$. Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, on a

$$([u] \times K) \cap [\Phi] \subset ([u] \cap (K - [\varphi])) \times K$$

donc $([u] \times K) \cap [\Phi]$ est compact. Ainsi d'une part on a

$$\begin{aligned} D^\alpha(u*\varphi)(x) &= D_x^\alpha\left(u_{(y)}(\varphi(x-y))\right) \\ &= u_{(y)}\left((D^\alpha\varphi)(x-y)\right) \\ &= (u * D^\alpha\varphi)(x) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} D^\alpha(u*\varphi)(x) &= D_x^\alpha\left(u_{(y)}(\varphi(x-y))\right) \\ &= u_{(y)}\left((D^\alpha\varphi)(x-y)\right) \\ &= u_{(y)}\left((-D_y)^\alpha(\varphi(x-y))\right) \\ &= (D^\alpha u)\left(\varphi(x-.)\right) \\ &= (D^\alpha u * \varphi)(x). \end{aligned}$$

3. Si $x \notin [u] + [\varphi]$ alors

$$[u] \cap [\varphi(x-.)] = [u] \cap (x - [\varphi]) = \emptyset$$

donc $(u*\varphi)(x) = 0$. Puisque $[u]+[\varphi]$ est fermé, ceci prouve que $[u*\varphi] \subset [u]+[\varphi]$.

4. Si $[u]$, $[\varphi]$ et $[\psi]$ sont composables, alors $[u]$ et $[\varphi]$ sont composables, de même que $[\varphi]$ et $[\psi]$. De plus, $[u*\varphi]$ et $[\psi]$ sont composables car $[u*\varphi] \subset [u]+[\varphi]$ et $[\psi]$, $[u]+[\varphi]$ sont composables. De façon analogue, u et $\varphi * \psi$ sont composables.

Cela étant, on a successivement

$$\begin{aligned} \Big((u*\varphi)*\psi\Big)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (u*\varphi)(x-y)\psi(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_{(z)}\Big(\varphi(x-y-z)\Big)\psi(y)\,dy \\ &= u_{(z)}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y-z)\psi(y)\,dy\right) \\ &= u_{(z)}\Big((\varphi*\psi)(x-z)\Big) \\ &= (u*(\varphi*\psi))(x). \end{aligned}$$

La permutation de la distribution et de l'intégrale est justifiée par le théorème 2.5.2. □

3.3 Composition de distributions

Définition 3.3.1 *Soient $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si $[u]$ et $[v]$ sont composables, le produit de composition de u et v est la distribution dans $\mathbb{R}^n$ définie par*

$$(u * v)(\varphi) = u_{(x)} \left(v_{(y)}(\varphi(x+y) \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

On dit que u et v sont composables.

Montrons que cette définition a bien un sens et que l'on définit ainsi une distribution.

L'expression est définie pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. De fait, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x + .)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et

$$v_{(y)}(\varphi(x+y)) = (v * \widetilde{\varphi})(-x).$$

Comme $[v]$ et $|\widetilde{\varphi}]$ sont composables (le second support est compact), la fonction $x \mapsto v_{(y)}(\varphi(x+y))$ est de classe C_∞ dans $\mathbb{R}^n$. Enfin, $[u] \cap [v_{(y)}(\varphi(. + y))] \subset [u] \cap ([\varphi] - [v])$ est compact ; si $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est égal à 1 au voisinage de $[u] \cap ([\varphi] - [v])$ on a

$$(u * v)(\varphi) \; = \; u_{(x)} \left(\chi(x) v_{(y)}(\varphi(x+y)) \right).$$

Montrons que $u * v$ est une distribution.

Tout d'abord, il est immédiat de voir que l'application $u{*}v$ est liénéaire. Montrons alors que l'on a les majorations dite « de continuité ». Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Si $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est égal à 1 au voisinage de $[u] \cap (K - [v])$, quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ il vient, en utiisant le fait que u puis v sont des distributions,

$$\begin{aligned}
|(u * v)(\varphi)| &= \left| u_{(x)} \left(\chi(x) v_{(y)}(\varphi(x+y)) \right) \right| \\
&\leq C_1 \sup_{|\alpha| \leq k_1} \sup_{x \in [\chi]} |D_x^\alpha \left(\chi(x) v_{(y)}(\varphi(x+y)) \right)| \\
&\leq C_1' \sup_{|\alpha| \leq k_1} \sup_{x \in [\chi]} |v_{(y)} \left((D^\alpha \varphi)(x+y) \right)| \\
&\leq C_1' C_2 \sup_{|\alpha| \leq k_1} \sup_{|\beta| \leq k_2} \sup_{x \in [\chi]} \sup_{y \in K - [\chi]} |(D^{\alpha+\beta} \varphi)(x+y)| \\
&\leq C_1' C_2 \sup_{|\alpha| \leq k_1 + k_2} \sup_K |D^\alpha \varphi|.
\end{aligned}$$

Voici quelques propriétés relatives à la composition de distributions particulières.

Propriété 3.3.2 *a) Si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et si $[f]_{pp}$, $[g]_{pp}$ sont composables alors $u_f * u_g = u_{f*g}$.*

b) Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ sont composables, alors $u * u_f = u_{u*f}$.

Preuve. a) Notons tout d'abord que l'hypothèse sur les support donne l'existence des deux membres de l'égalité.

Cela étant, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égal à 1 au voisinage de $[f]_{pp} \cap ([\varphi] - [g]_{pp})$ On a successivement [1]

$$\begin{aligned}
(u_f * u_g)(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\, f(x)\, u_g(\varphi(x+.))\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\, f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, \varphi(x+y)\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(t-x)\, \varphi(t)\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(t-x)\, f(x)\ dx \right)\ dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\, (f * g)(t)\ dt
\end{aligned}$$

b) Ici aussi, l'hypothèse donne l'existence des deux membres de l'égalité.

Cela étant, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Le cas de la composition d'une distribution et d'une fonction donne, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u_f\,(\varphi(x+.)) \ = \ (f * \tilde{\varphi})(-x) \ = \ (f * \tilde{\varphi})(0-x)$$

donc

$$\begin{aligned}
(u * u_f)(\varphi) &= u_{(x)} \Big(u_f(\varphi(x+.)) \Big) \\
&= u_{(x)} \Big((f * \widetilde{\varphi})(0-x) \Big) \\
&= \Big(u * (f * \widetilde{\varphi}) \Big)\,(0) \\
&= \Big((u * f) * \widetilde{\varphi} \Big)\,(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (u * f)(x)\, \widetilde{\varphi}(0-x)\ dx \\
&= u_{u*f}(\varphi).
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.3.3 *Si $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $[u], [v]$ sont composables alors*

1. $[u * v] \subset [u] + [v]$,
2. *si $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $[u]$, $[v]$, $[\varphi]$ sont composables alors $(u * v) * \varphi = u * (v * \ \varphi)$.*

---

1. vu la propriété de χ vis-à-vis des supports de f, g, φ, l'intégration (en x) se fait en fait sur le support de χ et $\chi(x)\, f(x)\, \varphi(x+y) = f(x)\, \varphi(x+y)$ comme on le vérifie en considérant $x \in [\chi]$ et $x \notin [\chi]$

3. $u * v = v * u$,

*4. si en outre $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $[u]$, $[v]$, $[w]$ sont composables alors $(u*v)*w = u*(v* w)$,*

5. $D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * D^\alpha v$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Preuve. 1. Si $[\varphi] \cap ([u] + [v]) = \emptyset$ alors $[u] \cap [v_{(y)}(\varphi(. + y))] \subset [u] \cap ([\varphi] - [v]) = \emptyset$ donc $(u * v)(\varphi) = 0$. Puisque $[u] + [v]$ est fermé, ceci prouve le premier point.

2. Tout d'abord, l'hypothèse sur les supports donne un sens au deux membres de l'égalité.

Cela étant, pour avoir une idée de la façon de procéder, regardons tout d'abord le cas où φ est à support compact. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$. Par définition, on a

$$((u * v) * \varphi)(x) = (u * v)_{(y)} \Big(\varphi(x - y)\Big) ;$$

en définissant $\psi : t \mapsto \varphi(x-t)$ on a donc successivement (par définition puisque $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned}
((u * v) * \varphi)(x) &= (u * v)_{(y)} \Big(\varphi(x - y)\Big) \\
&= (u * v)\,(\psi) \\
&= u_{(y)} \Big(v_{(z)}(\psi(y + z))\Big) \\
&= u_{(y)} \Big(v_{(z)}(\varphi(x - y - z))\Big) \\
&= u_{(y)} \Big((v * \varphi)(x - y)\Big) \\
&= (u * (v * \varphi))(x).
\end{aligned}$$

Supposons que $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ sans que son support ne soit compact et bien sûr que $[u], [v], [\varphi]$ sont composables (hypothèse). Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et définissons $\psi : t \mapsto \varphi(x - t)$. On a

$$[u * v] \cap [\psi] \subset ([u] + [v]) + (x - [\varphi]) = \text{ compact;}$$

en prenant $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 au voisinage de $([u] + [v]) \cap (x - [\varphi])$ on obtient donc, par définition,

$$\begin{aligned}
\Big((u * v) * \varphi\Big)\,(x) &= (u * v)\,(\psi) \\
&= (u * v)(\chi\psi) \\
&= u_{(y)} \Big(v_{(z)} \Big(\chi(y + z)\psi(y + z)\Big)\Big) \\
&= u_{(y)} \Big(v_{(z)} \Big(\chi(y + z)\varphi(x - y - z)\Big)\Big) .
\end{aligned}$$

Si on veut continuer comme dans le cas où φ était supposé à support compact, il faut s'assurer que

$$v_{(z)} \Big(\chi(y + z)\varphi(x - y - z)\Big) = v_{(z)} \Big(\varphi(x - y - z)\Big)$$

c'est-à dire que $z \mapsto \chi(y+z)$ convient pour définir cette expression par « extension par support ». On a d'une part

$$[v] \cap [\varphi(x-y-.] \subset [v] \cap (x-y-[\varphi])$$

et d'autre part $\chi = 1$ au voisinage de $([u]+[v]) \cap (x-[\varphi])$ donc la fonction $z \mapsto \chi(y+z)$ est égale à 1 au voisinage de

$$([u]+[v]-y) \cap (x-y-[\varphi])$$

Il faut donc un peut affiner nos constructions afin que l'ensemble $([u]+[v]-y)\cap(x-y-[\varphi])$ contienne l'ensemble $[v] \cap (x-y-[\varphi])$. Si $y \in [u]$ cela est vrai mais… il faut appliquer la distribution u à cette fonction de y et il ne suffit pas que deux fonctions soient égales sur le support d'une distribution pour que la valeur de celle-ci en ces deux fonctions soit la même ! Par contre, si l'égalité a lieu dans un voisinage du support de la distribution [2], alors l'égalité a lieu. Re-travaillons donc pour obtenir cela.

Il suffit de reprendre la construction ci-dessus mais en partant non plus de $[u]$ mais d'un voisinage de cet ensemble, par exemple $[u]+b(\epsilon)$ où $b(\epsilon)$ est la boule fermée centrée à l'origine et de rayon ϵ. L'ensemble $b(\epsilon)$ étant compact, les propriétés des fermés composables permettent d'obtenir que $[u]+[v]+b(\epsilon)$ et $[\varphi]$ sont composables ; soit donc $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égal à 1 au voisinage de $(x-[\varphi])\cap([u]+[v]+b(\epsilon))$, cet ensemble contenant $(x-[\varphi])\cap([u]+[v])$. On reprend alors le développement ci-dessus avec ce χ. On a donc toujours

$$[v] \cap [\varphi(x-y-.] \subset [v] \cap (x-y-[\varphi])$$

mais ici on a $\chi = 1$ au voisinage de $([u]+[v]+b(\epsilon))\cap(x-[\varphi])$ donc la fonction $z \mapsto \chi(y+z)$ est égale à 1 au voisinage de

$$([u]+b(\epsilon)+[v]-y) \cap (x-y-[\varphi]).$$

Et ici , pour tout $y \in [u]+b(\epsilon)$, on a bien

$$[v] \cap (x-y-[\varphi]) \subset ([u]+b(\epsilon)+[v]-y) \cap (x-y-[\varphi])$$

donc

$$v_{(z)}\Big(\chi(y+z)\varphi(x-y-z)\Big) = v_{(z)}\Big(\varphi(x-y-z)\Big), \quad \forall y \in [u]+b(\epsilon)$$

donc

$$\Big((u*v)*\varphi\Big)(x) = u_{(y)}\Big(v_{(z)}\Big(\chi(y+z)\varphi(x-y-z)\Big)\Big) = u_{(y)}\Big(v_{(z)}\Big(\varphi(x-y-z)\Big)\Big)$$

2. On a vu cette propriété pour des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$; elle s'étend aux fonctions de $f \in C_\infty(\Omega)$ avec $[f]\cap[u]$ compact. De fait, soient $f, g \in C_\infty(\Omega)$ avec $[f]\cap[u]$ et $[g]\cap[u]$ compacts telles que $f = g$ dans un voisinage V de $[u]$. Si $h \in \mathcal{D}(\Omega)$ est égal à 1 au voisinage de $([f]\cap[u])\cup([g]\cap[u])$, on a $u(f) = u(fh)$ et $u(g) = u(gh)$. Comme $fh = gh$ dans V et que $fh, gh \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $u(fh) = u(gh)$ donc $u(f) = u(g)$.

et on continue comme dans le cas précédent.

3. En appliquant l'associativité du produit de composition entre deux distributions et une fonction, entre une distribution et deux fonctions et la commutativité du produit de composition entre fonctions on a, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}(u*v)*\varphi*\psi &= u*(v*(\varphi*\psi)) = u*((v*\varphi)*\psi) = u*(\psi*(v*\varphi))\\ &= (u*\psi)*(v*\varphi) = (v*\varphi)*(u*\psi) = v*(\varphi*(u*\psi))\\ &= v*((u*\psi)*\varphi) = v*(u*(\varphi*\psi)) = (v*u)*\varphi*\psi.\end{aligned}$$

Ceci prouve que $(u*v)*\varphi = (v*u)*\varphi$ pour tout φ donc $u*v = v*u$.

*4.*De même, si $[u], [v]$ et $[w]$ sont composables,

$$\begin{aligned}(u*(v*w))*\varphi &= u*((v*w)*\varphi) = u*(v*(w*\varphi))\\ &= (u*v)*(w*\varphi) = ((u*v)*w)*\varphi\end{aligned}$$

donc $u*(v*w) = (u*v)*w$.

5. Enfin, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, vu les résultats relatifs à la composition d'une fonction et d'une distribution et vu ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned}D^\alpha((u*v)*\varphi) = (D^\alpha(u*v))*\varphi &= (u*v)*D^\alpha\varphi = u*(v*D^\alpha\varphi)\\ &= u*((D^\alpha v)*\varphi) = (u*D^\alpha v)*\varphi.\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration puisque le produit de composition est commutatif. □

Chapitre 4

Distributions tempérées

Si on veut généraliser la transformée de Fourier aux distributions comme on a fait les généralisations dans ce qui précède (dériver, multiplier par une fonction C_∞, composer, etc), c'est-à-dire en faisant « subir » l'application à la fonction test puis en appliquant la distribution à la nouvelle fonction obtenue, on se heurte ici au fait que la transformée de Fourier d'une fonction non nulle de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ appartient bien à $C_\infty(\mathbb{R})$ mais n'est pas à support compact [1].

Ainsi, comme pour les fonctions, la transformée de Fourier d'une distribution ne peut être définie que sous certaines conditions. Il est naturel de remplacer l'espace des fonctions test $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par [2] $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ce dernier est en effet stable pour la transformation de Fourier alors que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ne l'est pas.

4.1 Fonctions à décroissance rapide

La transformée de Fourier d'un élément non nul de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ n'appartient jamais à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. De manière à améliorer le comportement des fonctions test pour cette transformation, nous considérons un ensemble plus grand.

Définition 4.1.1 *On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions f de classe C_∞ dans $\mathbb{R}^n$ telles que*

$$p_{k,N}(f) = \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |D^\alpha f(x)|$$

soit fini pour tous naturels k, N. Classiquement, on dit qu'une telle fonction est dite « à décroissance rapide ».

1. De fait, si elle l'est, alors la fonction–qui est la transformée de Fourier de sa transformée de Fourier– est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction holomorphe dans le plan ; mais la fonction étant nulle en dehors d'un compact, on obtient alors qu'elle est nulle partout !

2. espace des fonctions « à décroissance rapide », voir plus loin pour une étude de cet espace

Remarquons que l'on peut remplacer les « poids » $(1+|x|)^N$ par les « poids »$1+|x|^N$. De fait, les fonctions $x \mapsto (1+|x|)^N$ et $x \mapsto 1+|x|^N$ sont des polynômes en $|x|$ de degré N dont le coefficient de $|x|^N$ est 1 donc

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+|x|)^N}{1+|x|^N} = 1$$

et par suite il existe des constantes $r, R > 0$ telles que

$$r\,(1+|x|^N) \;\leq\; (1+|x|)^N \;\leq\; R\,(1+|x|^N), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Cela étant, passons en revue quelques propriétés immédiates de cet ensemble.

• On a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

• La fonction $x \mapsto \exp(-|x|^2)$ est à décroissance rapide.

• Muni de l'addition et de la multiplication par un complexe, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel.

• Le produit de deux fonctions à décroissance rapide est à décroissance rapide.

• Les fonctions à décroissance rapide sont bornées, intégrables et de carré intégrable dans $\mathbb{R}^n$.

Les fonctions $p_{k,N}$ permettent de définir une topologie (de Fréchet) sur l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; on y reviendra (théorie et/ou exercices). Mais pour le moment, nous n'introduirons que les notions de convergence et de Cauchy (qui correspondent bien sûr à la structure topologique que l'on vient de mentionner).

Définition 4.1.2 *On dit qu'une suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si la suite $p_{k,N}(f - f_m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0 pour tous k, N.*

Une suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est de Cauchy dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si , pour tous k, N, $p_{k,N}(f_r - f_s)$ converge vers 0 lorsque r et s tendent vers $+\infty$.

Dans le cadre de cet espace, on a aussi le caractère séquentiellement complet (au sens où toutes les suites de Cauchy convergent), comme le montre le résultat suivant. Et on a aussi un résultat de densité qui s'avèrera plus qu'utile.

Proposition 4.1.3 *1. Toute suite de Cauchy dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge.*

2. Tout élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est la limite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ d'une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. 1. Si f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, toutes les dérivées termes à termes de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sont de Cauchy pour la convergence uniforme dans $\mathbb{R}^n$. La suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge donc uniformément vers une fonction $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Il reste à prouver la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Fixons N et k et soit $\epsilon > 0$. Puisque la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est de Cauchy, si r et s sont assez grands et $|\alpha| \leq k$, on a

$$(1+|x|)^N |D^\alpha f_r(x) - D^\alpha f_s(x)| \leq p_{k,N}(f_r - f_s) \leq \epsilon$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En passant à la limite sur r on obtient

$$(1+|x|)^N |D^\alpha f(x) - D^\alpha f_s(x)| \leq \epsilon$$

si s est assez grand et $|\alpha| \leq k$. Ceci montre que $f \in S(\mathbb{R}^n)$ (puisque c'est un espace vectoriel) et que la suite f_m ($m \in \mathbb{R}^n$) converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. Prouvons la seconde partie de l'énoncé. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction égale à 1 dans la boule unité. Les fonctions $x \mapsto f_m(x) = \chi(x/m)f(x)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) appartiennent à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrons que la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pour tout naturel positif N et tout multi-indice α, on a

$$D^\alpha(f - f_m)(x) = \Big(1 - \chi(x/m)\Big) D^\alpha f(x) - \sum_{\beta \leq \alpha,\ \beta \neq 0} C_\alpha^\beta m^{-|\beta|} (D^\beta \chi)(x/m) D^{\alpha-\beta} f(x).$$

Cette expression est nulle si $|x| < m$. Il existe donc une constante C telle que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |D^\alpha(f-f_m)(x)| &= \sup_{|x| \geq m} (1+|x|)^N |D^\alpha(f-f_m)(x)| \\ &\leq \frac{1}{m} \sup_{|x| \geq m} (1+|x|)^{N+1} |D^\alpha(f-f_m)(x)| \\ &\leq \frac{C}{m} \sup_{|\beta| \leq |\alpha|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^{N+1} |D^\beta f(x)|. \end{aligned}$$

Ceci démontre la proposition. □

Rappelons que la transformée de Fourier (+,-) d'une fonction $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$(\mathcal{F}^\pm f)(\xi) = \mathcal{F}_\xi^\pm f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,\xi>} f(x) dx.$$

On sait que les fonctions $\mathcal{F}^\pm f$ sont uniformément continues dans $\mathbb{R}^n$, convergent vers 0 à l'infini et que $\|\mathcal{F}^\pm f\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Rappelons aussi les définition et propriétés suivantes. Si $f \in L_1 \cap L_2$ alors $\|\mathcal{F}^\pm f\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2$. Si $f \in L_2$ et f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite de fonctions de $L_1 \cap L_2$ qui converge dans L_2 vers f, la suite $\mathcal{F}^\pm f_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge dans L_2 et sa limite est indépendante de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) choisie. On pose

$$\mathbb{F}^\pm f = \lim_{m \to +\infty} \mathcal{F}^\pm f_m.$$

L'égalité $\|\mathbb{F}^\pm f\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2$ reste valable pour tout $f \in L_2$.

Etablissons maintenant un résultat important de continuité : la transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est en encore un élément de cet ensemble et cette application (transformation de Fourier) est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.1.4 *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{F}^{\pm} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus, pour tous naturels k, N, il existe des naturels k', N' et une constante $C > 0$ tels que*

$$p_{k,N}(\mathcal{F}^{\pm} f) \leq C p_{k',N'}(f), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, si une suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vers f, alors la suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vers $\mathcal{F}^{\pm} f$.

Preuve. L'idée est d'utiliser les relations liant les dérivées et la transformation de Fourier.

Pour tout $f \in \mathcal{S}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$D^{\alpha} \mathcal{F}_y^{\pm} f = (\pm i)^{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>} x^{\alpha} f(x)\, dx$$

et

$$\mathcal{F}_y^{\pm} D^{\alpha} f = (\mp iy)^{\alpha} \mathcal{F}_y^{\pm} f.$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}_y^{\pm} \Big((1 - \Delta) f \Big) \; = \; (1 + |y|^2)\, \mathcal{F}_y^{\pm} f$$

Notons aussi que, quel que soit $r \geq 0$, on a

$$1 + r \; \leq \; 2\,(1 + r^2).$$

Cela étant, pour tout naturel N et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
(1 + |y|)^N \left| D^{\alpha}(\mathcal{F}_y^{\pm} f) \right| \; &\leq \; 2^N (1 + |y|^2)^N \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>} x^{\alpha} f(x)\, dx \right| \\
&= \; 2^N \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>} (1 - \Delta)^N (x^{\alpha} f(x) dx) \right| \\
&\leq \; C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big(1 + |x| \Big)^{n+1} \left| (1 - \Delta)^N (x^{\alpha} f(x)) \right| \\
&\leq \; C' p_{2N,\, n+1+|\alpha|}(f)
\end{aligned}$$

et on conclut.□

4.2 Distributions tempérées et transformation de Fourier

Définition 4.2.1 Une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est dite *tempérée* s'il existe une constante C et des naturels k, N tels que $|u(\varphi)| \leq Cp_{k,N}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions tempérées.

Si une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifie une estimation de type ci-dessus, c'est bien sûr une distribution tempérée.

Un important exemple de distribution tempérée est celui des distributions à support compact (on y reviendra quand il s'agira d'étudier la transformation de Fourier de distributions tempérées). De fait, si u est une distribution à support compact et si $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est une fonction égale à 1 dans un voisinage du support de u, alors il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ (qui dépendent du support de χ) tels que

$$|u(\varphi)| = |u(\varphi\chi)| \ \leq \ C \sup_{x\in[\chi],|\alpha|\leq k} |D^\alpha(\varphi\chi)(x)| \ \leq \ C' \sup_{x\in\mathbb{R}^n|\alpha|\leq k} |D^\alpha\varphi(x)| \,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Commençons par définir $u(f)$ lorsque u est une distribution tempérée et f un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Vu la propriété de densité, il existe une suite φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Comme on a

$$|u(\varphi_r) - u(\varphi_s)| = |u(\varphi_r - \varphi_s)| \leq Cp_{k,N}(\varphi_r - \varphi_s)$$

quels que soient les naturels r, s, la convergence de la suite φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ implique que la suite numérique $u(\varphi_m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) est de Cauchy, donc converge. Par la technique habituelle, on obtient directement que la limite ne dépend pas de la suite choisie ; on la désigne alors par $u(f)$.

De plus, si $|u(\varphi)| \leq Cp_{k,N}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on obtient aussi $|u(f)| \leq Cp_{k,N}(f)$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ce qui précède montre que *toute distribution tempérée s'étend en une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Définissons à présent **les transformées de Fourier d'une distribution tempérée.**

Si u est une distribution tempérée, la distribution $\mathcal{F}^\pm u$ définie par

$$(\mathcal{F}^\pm u)(\varphi) = u(\mathcal{F}^\pm \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

est tempérée en vertu de la proposition 4.1.4. On a aussi

$$(\mathcal{F}^\pm u)(f) = u(\mathcal{F}^\pm f)$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fait, si φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, par définition on a

$$(\mathcal{F}^\pm u)(f) = \lim_{m\to+\infty} (\mathcal{F}^\pm u)(\varphi_m).$$

Par ailleurs, la suite $\mathcal{F}^{\pm}\varphi_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers $\mathcal{F}^{\pm}f$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (cf encore 4.1.4) ; dès lors la suite $(\mathcal{F}^{\pm}u)(\varphi_m) = u(\mathcal{F}^{\pm}\varphi_m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers $u(\mathcal{F}^{\pm}f)$ puisque u est tempéré et on conclut.

On dit que $\mathcal{F}^{\pm}u$ est la *transformée de Fourier* de u. Pour toute distribution tempérée u, on a

$$\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm}u = (2\pi)^n u$$

comme on le vérifie en repassant à la définition de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée et du théorème de Fourier dans le cas des fonctions intégrables.

Bien sûr les transformées « + » et « − » sont liées, comme c'est la cas pour les fonctions : on a

$$(\mathcal{F}^{+}u)(\varphi) \;=\; (\mathcal{F}^{-}u)(\varphi(-.)).$$

Donnons quelques exemples.

Exemple 4.2.2 *La transformée de Fourier de la distribution de Dirac en 0 est la distribution de la fonction 1. Plus généralement, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier de δ_{x_0} est la distribution associée à la fonction $x \mapsto e^{\pm i<x,x_0>}$.*

Ainsi, il résulte de la formule d'inversion de Fourier que la transformée de Fourier de la fonction 1 est $(2\pi)^n\delta_0$.

De fait on a directement

$$(\mathcal{F}^{\pm}\delta_{x_0})(f) = \delta_{x_0}\left(\mathcal{F}^{\pm}f\right) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x_0,x>} f(x)\; dx.$$

Exemple 4.2.3 *Si $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ou $L_2(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}^{\pm}u_f = u_{\mathcal{F}^{\pm}f}$.*

Exemple 4.2.4 *Si u est une distribution à support compact, on a*

$$(\mathcal{F}^{\pm}u)(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\; u(e^{\pm i<.,y>})\; dy, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

C'est une conséquence immédiate du théorème relatif à la permutation d'une distribution et d'une intégrale.

La transformée de Fourier d'une distribution à support compact s'identifie donc toujours à une fonction de classe C_∞. On utilise généralement les notations

$$\widehat{u} \;:\; y \mapsto \widehat{u}(y) = u(e^{-i<.,y>}), \quad \breve{u} \;:\; y \mapsto \breve{u}(y) = u(e^{i<.,y>}).$$

Ces fonctions s'étendent à des fonctions entières qui possèdent un comportement particulier (cf le théorème de Paley-Wiener).

Exemple 4.2.5 *On a*

$$(\mathcal{F}^{\pm}Y)(\varphi) = \pi\varphi(0) \pm i \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx.$$

On en déduit que la transformée de Fourier positive $\mathcal{F}^+$ de la distribution $\mathrm{pf}(1/x)$ *est la fonction $x \mapsto i\pi\,\mathrm{sgn}(x)$.*

De fait, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a son support inclus dans $[-R, R]$, on a successivement

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^+Y)(\varphi) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_y^+\varphi\; dy \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{ixy}\, \varphi(x)\; dx\right)\; dy \\
&= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{N} \left(\int_{-R}^{R} e^{ixy}\, \varphi(x)\; dx\right)\; dy \\
&= \lim_{N\to+\infty} \int_{-R}^{R} \varphi(x)\; \left(\int_0^{N} e^{ixy}\; dy\right) dx \\
&= \lim_{N\to+\infty} \int_{-R}^{R} \varphi(x)\; \left(\frac{e^{ixN} - 1}{ix}\right) dx \\
&= \lim_{N\to+\infty} \int_{-R}^{R} \varphi(x)\; \left(\frac{\cos(xN) + i\sin(xN) - 1}{ix}\right) dx \\
&= \lim_{N\to+\infty} \int_{-R}^{R} \left(\varphi(x)\; \frac{\cos(xN) - 1}{ix} \; + \; \varphi(x)\; \frac{\sin(xN)}{x}\right) dx \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\int_{-R}^{R} \varphi(x)\; \frac{\cos(xN) - 1}{ix}\; dx \; + \; \int_{-R}^{R} \varphi(x)\; \frac{\sin(xN)}{x}\; dx\right)
\end{aligned}$$

Cela étant, examinons séparément les deux intégrales. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} \varphi(x)\; \frac{\cos(xN) - 1}{ix}\; dx &= \int_0^{R} \left(\varphi(x)\; \frac{\cos(xN) - 1}{ix} + \varphi(-x)\; \frac{\cos(xN) - 1}{-ix}\right)\; dx \\
&= \int_0^{R} \cos(xN)\, \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{ix}\; dx \; + \; \int_0^{R} \frac{\varphi(-x) - \varphi(x)}{ix}\; dx
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} \varphi(x)\; \frac{\sin(xN)}{x}\; dx &= \int_0^{R} \Big(\varphi(x) + \varphi(-x)\Big)\; \frac{\sin(xN)}{x} dx \\
&= \int_0^{R} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x}\; \sin(xN)\; dx \; + \; 2\varphi(0) \int_0^{R} \frac{\sin(xN)}{x} dx.
\end{aligned}$$

Cela étant, le théorème de Riemann-Lebegue donne

$$\lim_{N\ to+\infty} \int_0^R \cos(xN)\, \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{ix}\, dx \;=\; 0$$

et

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^R \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x}\, \sin(xN)\, dx \;=\; 0.$$

Ainsi, on obtient finalement

$$(\mathcal{F}^+ Y)(\varphi) \;=\; i\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\, dx \;+\; \pi\,\varphi(0)$$

Exemple 4.2.6 *Si* $0<\alpha<n$ *et*

$$T_\alpha(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)}{|x|^\alpha}\, dx, \quad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

alors

$$\mathcal{F}^\pm T_\alpha = \frac{2^{n-\alpha}\pi^{n/2}\Gamma((n-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)}\, T_{n-\alpha}.$$

De fait, pour $0<\alpha<n$, la fonction $x\mapsto 1/|x|^\alpha$ est localement intégrable (on le voit en passant aux coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$) donc définit bien une distribution. De plus, comme $x\mapsto 1/(|x|^\alpha\,(1+|x|^n)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ (on le voit aussi en passant aux coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$), T_α est bien une distribution tempérée.

Tout d'abord, notons l'égalité suivante, faisant intervenir la fonction Γ ; nous l'exploiterons dans le calcul de la transformation de Fourier demandée. *Pour tous* $r>0$ *et tout* $s>0$ *on a (*)*

$$\frac{1}{r^s} \;=\; \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} e^{-rt}\, t^{s-1}\, dt.$$

Cette égalité se démontre directement en faisant le changement de variable naturel $u=rt$.

Cela étant, le calcul rigoureux de la transformée de Fourier de T_α repose sur les développement suivants, dans lesquels il manque visiblement de justifications pour permuter les intégrales ; le calcul rigoureux se trouve dans l'annexe.

Effectuons ces développements pour $n=1$ et $\mathcal{F}^+$ (pour alléger les notations) ; le cas général utilise les mêmes techniques. Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour trouver l'expression de

$$\mathcal{F}^+ T_\alpha(\varphi) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{F}_x^+\varphi}{|x|^\alpha}\, dx$$

on va remplacer $1/|x|^\alpha$ par une intégrale de type ci-dessus ((*), $r=|x|^2$, $s=\alpha/2$), écrire la transformation de Fourier sous la forme d'une intégrale, faire des permutations d'intégrales (c'est cela qui n'est pas rigoureux) et se rappeler la forme explicite de la transformée de

Fourier d'une gaussienne ; ces manipulations permettront d'arriver au but. Formellement on a donc successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^+T_\alpha(\varphi) &= \iiint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times]0,+\infty[} e^{ixy}\,\varphi(y)\,\frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\,e^{-|x|^2t}\,t^{\alpha/2-1}\;dx\,dy\,dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\iint_{\mathbb{R}\times]0,+\infty[}\varphi(y)\,t^{\alpha/2-1}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\,e^{-x^2t}\;dx\right)\;dy\,dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\iint_{\mathbb{R}\times]0,+\infty[}\varphi(y)\,t^{\alpha/2-1}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-y^2/(4t)}\;dy\,dt\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-3/2}\,e^{-y^2/(4t)}\;dt\right)\;dy.
\end{aligned}$$

A ce stade, le changement de variable $u = 1/4t$ puis l'utilisation de (*) avec $r = y^2$ et $s = -\alpha/2 + 1/2$ donne finalement

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^+T_\alpha(\varphi) &= \frac{2^{1-\alpha}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\left(\int_0^{+\infty} u^{-\alpha/2-1/2}\,e^{-y^2u}\;du\right)\;dy\\
&= \frac{2^{1-\alpha}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\left(\int_0^{+\infty} u^{(-\alpha/2+1/2)-1}\,e^{-y^2u}\;du\right)\;dy\\
&= \frac{2^{1-\alpha}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\,\frac{\Gamma(-\alpha/2+1/2)}{y^{1-\alpha}}\;dy\\
&= \frac{2^{1-\alpha}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\alpha/2+1/2)}{\Gamma(\alpha/2)}\;T_{1-\alpha}(\varphi),
\end{aligned}$$

comme annoncé.

4.3 Distributions périodiques

Dans cette section nous n'envisagerons que le cas $n = 1$, pour alléger les notations.

Définition 4.3.1 *Soit $a > 0$. Une distribution u dans $\mathbb{R}$ est dite périodique de période a (ou a-périodique) si*

$$u(\varphi(.+a)) = u(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Si u est périodique de période a, on obtient immédiatement que, quelque soit l'entier n, on a $u(\varphi(.+na)) = u(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

L'objectif de cette section est de montrer que toute distribution périodique est tempérée. Au préalable, établissons la propriété suivante, laquelle nous sera bien utile par la suite.

Propriété 4.3.2 *Soient u une distribution dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_0$ et $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Si, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose*

$$c_m = u_{(x)}\left(\varphi_0(x)e^{\frac{2i\pi mx}{a}}\right),$$

alors il existe une constante $C > 0$ et un naturel N tels que

$$|c_m| \leq C \ (1 + |m|)^N, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Preuve. Comme $v = \varphi_0 u$ est une distribution à support compact, il existe des constantes $c > 0, k \in \mathbb{N}$ telles que

$$|u(f\varphi_0) = |v(f)| \leq C \sup_{x \in [\varphi_0], 0 \leq \alpha \leq k} |D^\alpha f(x)|, \quad \forall f \in C_\infty(\mathbb{R}).$$

Dès lors on obtient

$$|c_m| = \left| v_{(x)} \left(e^{\frac{2i\pi m x}{a}} \right) \right| \leq C \sup_{x \in [\varphi_0], 0 \leq \alpha \leq k} |D^\alpha e^{\frac{2i\pi m x}{a}}(x)| \leq C_0 (1 + |m|^k) \leq C_1 (1 + |m|)^k, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

□

Le résultat suivant est une généralisation de la décomposition d'une fonction l^2_{loc} et périodique en série trigonométrique de Fourier.

Proposition 4.3.3 *Si u est une distribution a-périodique, alors il existe une suite unique de complexes c_m ($m \in \mathbb{Z}$) telle que*

$$u(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi m x/a} \varphi(x) \ dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

De plus, si $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est tel que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x - ak) = 1$ pour tout réel x, alors

$$c_m = \frac{1}{a} u_{(x)} \left(\varphi_0(x) e^{2i\pi m x/a} \right), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Preuve. Prouvons l'unicité : supposons que

$$u(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi m x/a} \varphi(x) \ dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et déterminons l'expression des c_m. L'idée est d'adapter la preuve dans le cas des séries trigonométriques de Fourier, c'est-à-dire d'adapter l'orthogonalité des exponentielles.

Soit une fonction $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que[3] $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x - ak) = 1$ pour tout réel x et soit $M \in \mathbb{Z}$. Posons $\varphi(x) = \varphi_0(x) e^{2i\pi M x/a}$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi m x/a} \varphi(x) \ dx = \int_0^a e^{-2i\pi m x/a} e^{2i\pi M x/a} = \begin{cases} a & \text{si } m = M \\ 0 & \text{si } m \neq M \end{cases}$$

3. Construction standard à partir d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, à valeurs dans $[0, 1]$ et égale à 1 sur $[0, a]$

et dès lors

$$u(\varphi) \;=\; u_{(x)}\left(\varphi_0(x)e^{2i\pi Mx/a}\right) \;=\; \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi mx/a}\varphi(x)\;dx \;=\; ac_M,$$

d'où

$$c_M \;=\; \frac{1}{a}\,u_{(x)}\left(\varphi_0(x)e^{2i\pi Mx/a}\right).$$

Montrons à présent que les coefficients

$$c_m = \frac{1}{a}u_{(x)}\left(\varphi_0(x)e^{2i\pi mx/a}\right), \quad m \in \mathbb{Z}$$

où $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est tel que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x-ak) = 1$ pour tout réel x, conviennent.

De fait, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Comme φ_0 et φ sont à supports compacts,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(.-ak)\varphi(.)$$

est en fait une somme finie et dès lors

$$u(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u\left(\varphi_0(.-ak)\varphi\right).$$

En se servant de la périodicité de u, on obtient ensuite

$$u(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u\left(\varphi_0\varphi(.+ak)\right)$$

puis, de la même manière que ci-dessus,

$$u(\varphi) = u\left(\varphi_0\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi(.+ak)\right).$$

Posons

$$\Phi(.) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi(.+ak).$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, cette fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période a ; son développement en série trigonométrique de Fourier dans $L_2(]0,a[)$ est donc

$$\Phi(x) = \frac{1}{a}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^a e^{2i\pi lt/a}\Phi(t)dt\right)\,e^{-2i\pi lx/a} = \frac{1}{a}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi lt/a}\varphi(t)dt\right)\,e^{-2i\pi lx/a}.$$

Cela étant, on vérifie directement que

$$\frac{1}{a}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi lt/a}\varphi(t)dt\right)\ e^{-2i\pi l./a}\ \varphi_0(.)\ \to\ \Phi\,\varphi_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

et dès lors on obtient

$$u(\varphi)=u(\varphi_0\Phi)=\frac{1}{a}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi lt/a}\varphi(t)dt\right)\ u\left(e^{-2i\pi l./a}\ \varphi_0(.)\right)$$

et on conclut.□

On arrive donc au résultat annoncé au début de cette section, lequel n'est qu'un corollaire des résultats précédents.

Théorème 4.3.4 *Toute distribution périodique est tempérée.*

Preuve. Soit u une distribution a-périodique. Vu les deux résultats précédents, il existe des coefficients c_m $(m \in \mathbb{Z})$ et des constantes $C > 0, N \in \mathbb{N}$ tels que

$$|c_m| \leq C(1+|m|)^N,\ \forall m \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad u(\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi mx/a}\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On obtient donc successivement (utiliser la continuité de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, cf début du chapitre)

$$\begin{aligned}
|u(\varphi)| &\leq C\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1+|m|)^N\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi mx/a}\varphi(x)dx\right| \\
&= C\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1+|m|)^{N+2}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2i\pi mx}{a}}\varphi(x)dx\right|\frac{1}{(1+|m|)^2} \\
&\leq C_1\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1+|2\pi m/a|)^{N+2}\left|\mathcal{F}^-_{2\pi m/a}\varphi\right|\frac{1}{(1+|m|)^2} \\
&\leq C_2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}p_{k',N'}(\varphi)\,\frac{1}{(1+|m|)^2} \\
&\leq C_3\,p_{k',N'}(\varphi);
\end{aligned}$$

d'où la conclusion.□

4.4 Le théorème de Paley-Wiener (cas $n = 1$)

Notation : $\widehat{u}$ pour la transformée de Fourier négative (d'une fonction, d'une distribution tempérée).

En guise d'**introduction**, énonçons la propriété qui suit, laquelle se démontre directement.

Propriété 4.4.1 *Si f est localement intégrable et à support compact alors sa transformée de Fourier s'étend à une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ et il existe $C > 0$ tel que*

$$|\widehat{f}(z)| \leq C\ e^{A|\Im z|},\ \forall z \in \mathbb{C}$$

où $A > 0$ est tel que $[f] \subset [-A, A]$.

Cette propriété s'étend au cas des distributions à support compact et la réciproque est vraie. Ce (double) résultat s'appelle le théorème de Paley-Wiener.

Pour rappel, si u est une distribution dans $\mathbb{R}$ à support compact, c'est une distribution tempérée dont la transformée de Fourier $\widehat{u}$ est la distribution tempérée associée à la fonction $y \mapsto u_{(x)}(e^{-ixy})$. Cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$. Par abus de langage et de notation, on dit et écrit que le prolongement holomorphe de la transformée de Fourier de u est la fonction $z \mapsto \widehat{u}(z) = u_{(x)}(e^{-ixz})$.

Théorème 4.4.2 (Paley-Wiener I) *Si u est une distribution dans $\mathbb{R}$ dont le support est inclus dans $[-A, A]$ alors il existe $C, N > 0$ tels que*

$$|\widehat{u}(z)| \leq C\ (1 + |z|)^N\ e^{A|\Im z|},\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Preuve. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction qui vaut 1 au voisinage de $[-A, A]$ et dont le support est inclus dans $[-A-\delta, A+\delta]$ (où $\delta > 0$). La majoration de continuité de u donne alors l'existence de $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|u(f)| = |u(f\psi)| \leq C \sup_{|x| \leq A+\delta,\ \alpha \leq k} |D_x^\alpha(\chi f(x))| \leq C' \sup_{|x| \leq A+\delta,\ \alpha \leq k} |D_x^\alpha f(x)|, \quad \forall f \in C_\infty(\mathbb{R})$$

où C' est C multiplié par une autre constante strictement positive qui ne dépend que de k et de χ.

Soit alors $z \in \mathbb{C}$. Par l'inégalité précédente, on obtient

$$|u_{(x)}(e^{-ixz})| \leq C' \sup_{|x| \leq A+\delta,\ \alpha \leq k} |D_x^\alpha e^{-ixz}| \leq C'(1+|z|)^k \sup_{|x| \leq A+\delta} |e^{-ixz}| \leq C'(1+|z|)^k e^{(A+\delta)|\Im z|}.$$

Pour z de partie imaginaire nulle, on a donc l'inégalité annoncée :

$$|\widehat{u}(z)| = |u_{(x)}(e^{-ixz})| \leq C'(1 + |z|)^k e^{(A+\delta)|\Im z|} = C'(1 + |z|)^k e^{A|\Im z|}.$$

Si la partie imaginaire de z n'est pas nulle, on procède comme suit. On pose $\varepsilon = 1/|\Im z|$ et on prend une fonction $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, égale à 1 au voisinage de $[-A, A]$, dont le support est inclus dans $[-A-\varepsilon, A+\varepsilon]$ et telle que

$$|D^\alpha \psi_\varepsilon| \leq C_0 \varepsilon^{-\alpha}, \quad \forall \alpha \leq k.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
|u_{(x)}(e^{-ixz})| = |u_{(x)}(\psi_\varepsilon(x)e^{-ixz})| &\leq C' \sup_{|x|\leq A+\varepsilon,\ \alpha\leq k} |D_x^\alpha \left(\psi_\varepsilon(x)e^{-ixz}\right)| \\
&\leq C'C_0 \sup_{|x|\leq A+\varepsilon,\ \alpha\leq k} \sum_{j=0}^{\alpha} C_\alpha^j \varepsilon^{-j} |z|^{\alpha-j} e^{x\Im z} \\
&\leq C'C_0 2^k\ (1+|z|)^k\ e^{(A+\varepsilon)|\Im z|} \\
&= C'C_0 2^k e\ (1+|z|)^k\ e^{A|\Im z|}.
\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Passons à la réciproque, laquelle demande bien davantage de travail. Etablissons tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 4.4.3 *Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $A > 0$ tel que, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_N > 0$ tel que*

$$|f(z)| \leq C_N\ (1+|z|)^{-N}\ e^{A|\Im z|},\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Alors il existe $\varphi \in \mathcal{D}([-A, A])$ tel que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = f(\xi),\ \forall \xi \in \mathbb{R}$$

(et même dans $\mathbb{C}$).

Preuve. Vu l'hypothèse, la restriction à $\mathbb{R}$ de f est une fonction intégrable. Pour conclure, il suffit dès lors de montrer que $\mathcal{F}^+ f$ appartient à $\mathcal{D}([-A, A])$.

Comme on a

$$|f(x)| \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N},\ x \in \mathbb{R}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, on obtient tout de suite que la transformée de Fourier de f est indéfiniment continûment dérivable dans $\mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que son support est inclus dans $[-A, A]$.

Fixons $y \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Vu l'holomorphie de f, on a successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^+ f &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{ixy} f(x)\ dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left(-\int_{V_{R,\delta}} f(z)e^{iyz}\ dz\ +\ \int_{V'_{R,\delta}} f(z)e^{iyz}\ dz\ +\ \int_{D_{R,\delta}} f(z)e^{iyz}\ dz \right) \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int_{D_{R,\delta}} f(z)e^{iyz}\ dz = \int_{\mathbb{R}} f(t+i\delta)e^{iy(t+i\delta)}\ dt
\end{aligned}$$

où $V_{R,\delta}$ est le chemin $t \in [0, \delta] \mapsto R + it$, où $V'_{R,\delta}$ est le chemin $t \in [0, \delta] \mapsto -R + it$ et où $D_{R,\delta}$ est le chemin $t \in [-R, R] \mapsto t + i\delta$. On obtient donc

$$\left|\mathcal{F}_y^+ f\right| \leq C_N e^{-y\delta} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|t|)^N}\ e^{A\delta}\ dt \leq C'_N e^{\delta(A-y)}.$$

Dès lors, si $A - y < 0$, on obtient $\lim_{\delta \to +\infty} e^{\delta(A-y)} = 0$ donc

$$\mathcal{F}_y^+ f = 0,\ \forall y > A.$$

On procède de manière analogue pour obtenir

$$\mathcal{F}_y^+ f = 0,\ \forall y < -A.$$

□

Théorème 4.4.4 (Paley-Wiener II) *Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $A > 0$, $C > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tels que*

$$|f(z)| \leq C\ (1 + |z|)^N\ e^{A|\Im z|},\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Alors il existe une distribution u à support compact inclus dans $[-A, A]$ telle que

$$f(z) = \widehat{u}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Preuve. Vu les hypothèses sur f, cette fonction définit une distribution tempérée. Pour conclure, nous allons montrer que sa transformée de Fourier $(+)$ est à support compact inclus dans $[-A, A]$.

Cela étant, les hypothèses vérifiées par f ressemblent à celle du lemme précédent à l'énorme différence près des quantificateurs ! L'idée est alors d'approcher (dans une sens bien précis !) f par des fonctions qui, elles vont vérifier les hypothèses du lemme.

Allons-y !

Soit $\psi \in \mathcal{D}([-1, 1])$ d'intégrale égale à 1 et pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons $\psi_m(x) = m\psi(mx)$. On sait que $\lim_{m \to +\infty}(\psi_m * \varphi) = \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par un calcul standard et direct, on montre aussi que pour tous naturels m, M, il existe une constante $C'_{M,m} > 0$ telle que

$$\left|\mathcal{F}_z^+ \psi_m\right| \leq \frac{C'_{M,m}}{(1+|z|)^M} e^{|\Im z|/m}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dès lors, pour tout m et tout $M \in \mathbb{N}_0$, il existe des constantes $C_{M,m} > 0$ telles que

$$\left|f(z)\mathcal{F}_z^+ \psi_m\right| \leq \frac{C_{M,m}}{(1+|z|)^M} e^{(A+\frac{1}{m})|\Im z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Le lemme précédent fournit alors

$$\varphi_m \in \mathcal{D}\Big([-A-1/m, A+1/m]\Big) \quad \text{tel que } \mathcal{F}^-\varphi_m = f\mathcal{F}^+\psi_m$$

pour tout m.

L'idée est maintenant de faire intervenir $\widehat{f}$ et les φ_m, lesquelles sont à support compact bien localisé ! Exploitons donc les égalités $\mathcal{F}^-\varphi_m = f\mathcal{F}^+\psi_m$.

Quel que soit m, la fonction $g_m = f\mathcal{F}^+\psi_m$ définit une distribution tempérée et on a, quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left(\mathcal{F}^+ u_{g_m}\right)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g_m(x)\,\mathcal{F}^+_x\varphi\; dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathcal{F}^+_x\psi_m\,\mathcal{F}^+_x\varphi\; dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathcal{F}^+_x\left(\psi_m * \varphi\right)\; dx.$$

Cela étant, d'une part on a

$$\lim_{m\to+\infty}(\psi_m * \varphi) = \varphi$$

dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ donc aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; il s'ensuit que l'on a également

$$\lim_{m\to+\infty}\mathcal{F}^+(\psi_m * \varphi) = \mathcal{F}^+\varphi$$

dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cela étant, les hypothèses sur f et cette dernière convergence impliquent que

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathcal{F}^+_x\left(\psi_m * \varphi\right)\; dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathcal{F}^+_x\varphi\; dx \;=\; (\mathcal{F}^+u_f)(\varphi).$$

D'autre part, en se rappelant que $\mathcal{F}^-\varphi_m = f\mathcal{F}^+\psi_m = g_m$, on a

$$\left(\mathcal{F}^+ u_{g_m}\right)(\varphi) \;=\; 2\pi u_{\varphi_m}(\varphi) \;=\; 2\pi\int_{\mathbb{R}}\varphi_m(x)\,\varphi(x)\; dx.$$

On a donc

$$2\pi\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi_m(x)\,\varphi(x)\; dx \;=\; 2\pi\lim_{m\to+\infty}\int_{-A-1/m}^{A+1/m}\varphi_m(x)\,\varphi(x)\; dx \;=\; (\mathcal{F}^+u_f)(\varphi).$$

Si $[\varphi] \subset \mathbb{R}\setminus[-A, A]$, alors $[\varphi] \subset \mathbb{R}\setminus[-A-1/m, A+1/m]$ pour tout m suffisamment grand et dès lors $(\mathcal{F}^+u_f)(\varphi) = 0$; cela montre que le support de $\mathcal{F}^+u_f$ est inclus dans $[-A, A]$.
□

Chapitre 5

Solutions élémentaires

Une petite introduction (extrait de Wikipedia (15/05/23)) : *En mathématiques et en physique, une fonction de Green est une solution (également appelée solution élémentaire ou solution fondamentale) d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants.*

Ces ≪ fonctions ≫ de Green, qui se trouvent être le plus souvent des distributions, ont été introduites par George Green[1] *en 1828 pour les besoins de l'électromagnétisme. Le mémoire de Green restera confidentiel jusqu'à sa republication en trois parties, à partir de 1850. Les fonctions de Green, qui seront dénommées ainsi par Riemann*[2] *en 1869, seront alors abondamment utilisées, notamment par Neumann*[3] *en 1877 pour sa théorie du potentiel Newtonien dans un espace à deux dimensions, puis en 1882 par Kirchhoff*[4] *pour l'équation de propagation des ondes dans un espace à trois dimensions, et enfin par Helmholtz*[5] *en acoustique.*

---

1. George Green (juillet 1793 - 31 mai 1841) est un physicien britannique presque totalement autodidacte.
2. Georg Friedrich Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, Royaume de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à la topologie, l'analyse, la géométrie différentielle et le calcul, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale
3. Carl Gottfried Neumann (7 mai 1832 Königsberg - 27 mars 1925 àLeipzig) est un mathématicien allemand. Il a notamment travaillé sur le principe de Dirichlet et fut l'un des pionniers de la théorie des équations intégrales.
4. Gustav Kirchhoff (né le 12 mars 1824 à Königsberg, en province de Prusse-Orientale et décédé à Berlin le 17 octobre 1887) est l'un des plus grands physiciens du 19eme siècle, avec des contributions essentielles à l'électrodynamique, la physique du rayonnement et la théorie mathématique de l'élasticité.
5. Hermann von Helmholtz est un scientifique (physiologiste et physicien) prussien, né le 31 août 1821 à Potsdam et mort le 8 septembre 1894 à Berlin-Charlottenburg. Il a notamment apporté d'importantes contributions à l'étude de la perception des sons et des couleurs ainsi qu'à la thermodynamique.

5.1 Définition d'une solution élémentaire

Soit

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$$

un opérateur de dérivation d'ordre m (dans $\mathbb{R}^n$) à coefficients constants.

Définition 5.1.1 *Une solution élémentaire de $P(D)$ est une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$P(D)E = \delta_0.$$

L'importance d'une solution élémentaire provient en bonne partie du fait qu'elle permet de résoudre $P(D)u = v$ lorsque v est à support compact. De fait, si v est une distribution à support compact et si u est une distribution telle que $P(D)u = v$ alors

$$E * \big(P(D)u\big) = E * v = \Big(P(D)E\Big) * u = \delta_0 * u = u.$$

Et effectivement $E * v$ convient en guise de u :

$$P(D)u = P(D)(E * v) = \Big(P(D)E\Big) * v = v.$$

5.2 Exemples

Exemple 5.2.1 *Dans $\mathbb{R}$, une solution élémentaire de l'opérateur de dérivation D est donnée par la distribution d'Heaviside*[6]

$$Y(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx.$$

C'est immédiat.

Exemple 5.2.2 *Dans $\mathbb{R}^2$, une solution élémentaire de l'opérateur de Cauchy-Riemann $D_{\overline{z}} = (D_x + iD_y)/2$ est définie par la fonction localement intégrable*

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{\pi z} = \frac{1}{\pi(x + iy)}.$$

6. Oliver Heaviside, né le 18 mai 1850 à Camden Town et mort le 3 février 1925 à Torquay, est un physicien et mathématicien britannique autodidacte. [...] Heaviside est principalement connu pour avoir reformulé et simplifié les équations de Maxwell sous leur forme actuelle utilisée en calcul vectoriel. Il a également établi l'équation des télégraphistes et développé une méthode de résolution des équations différentielles équivalente à l'emploi de la transformation de Laplace. Enfin, on lui doit l'usage des nombres complexes pour l'étude des circuits électriques.

Notons tout d'abord que la fonction $(x,y) \mapsto 1/|x+iy|$ est bien localement intégrable car en passant aux coordonnées polaires, la fonction $(r,\theta) \mapsto r/r = 1$ l'est.

Cela étant, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Nous allons montrer que

$$-\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{((D_x + iD_y)\varphi)(x,y)}{x+iy}\, dx\, dy \;=\; 2\pi\, \varphi(0)$$

en calculant l'intégrale par passage aux coordonnées polaires. Pour cela, donnons une expression exploitable à

$$\Big((D_x + iD_y)\varphi\Big)\, (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

En utilisant l'abus de notation $(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = re^{i\theta}$ pour alléger les expressions des dérivées, on a

$$D_r\, \Big(\varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) = (D_x\varphi)_{re^{i\theta}}\, \cos(\theta) \;+\; (D_y\varphi)_{re^{i\theta}}\, \sin(\theta)$$

et

$$D_\theta\, \Big(\varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) = -r(D_x\varphi)_{re^{i\theta}}\, \sin(\theta) \;+\; r(D_y\varphi)_{re^{i\theta}}\, \cos(\theta)$$

donc aussi

$$\frac{i}{r}\, D_\theta\, \Big(\varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) = -i(D_x\varphi)_{re^{i\theta}}\, \sin(\theta) \;+\; i(D_y\varphi)_{re^{i\theta}}\, \cos(\theta).$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
& D_r\, \Big(\varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\Big) + \frac{i}{r}\, D_\theta\, \Big(\varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) \\
&= \; (D_x\varphi)_{re^{i\theta}}\, \Big(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\Big) \;+\; (D_y\varphi)_{re^{i\theta}}\, \Big(\sin(\theta) + i\cos(\theta)\Big) \\
&= \; (D_x\varphi)_{re^{i\theta}}\, \Big(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\Big) \;+\; i(D_y\varphi)_{re^{i\theta}}\, \Big(-i\sin(\theta) + \cos(\theta)\Big) \\
&= \; e^{-i\theta}\, \Big((D_x + iD_y)\varphi\Big)_{re^{i\theta}}.
\end{aligned}$$

En reprenant alors l'intégrale de départ, en effectuant le changement de variables et en utilisant la notation

$$\Phi(r,\theta) = \varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
-\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{((D_x + iD_y)\varphi)(x,y)}{x+iy}\, dx\, dy \;&=\; -\iint_{]0,+\infty[\times[0,2\pi]} r\, \Big((D_x + iD_y)\varphi\Big)_{re^{i\theta}} /(re^{i\theta})\, dr\, d\theta \\
&=\; -\iint_{]0,+\infty[\times[0,2\pi]} e^{-i\theta}\, \Big((D_x + iD_y)\varphi\Big)_{re^{i\theta}}\, dr\, d\theta \\
&=\; -\iint_{]0,+\infty[\times[0,2\pi]} \Big(D_r\Phi(r,\theta) + \frac{i}{r}\, D_\theta\Phi(r,\theta)\Big)\, dr\, d\theta.
\end{aligned}$$

Puisque $\Phi(r,0)=\Phi(r,2\pi)$, on obtient

$$-\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{((D_x+iD_y)\varphi)(x,y)}{x+iy}\,dx\,dy \quad = \quad -\iint_{]0,+\infty[\times[0,2\pi]} D_r\Phi(r,\theta)\ dr\,d\theta$$

et finalement

$$-\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{((D_x+iD_y)\varphi)(x,y)}{x+iy}\,dx\,dy \ = \ 2\pi\,\varphi(0).$$

Exemple 5.2.3 *Dans $\mathbb{R}^n$, une solution élémentaire de l'opérateur (Laplacien) $-\Delta$ est définie par la fonction localement intégrable*

- $x\mapsto -|x|/2$ *pour* $n=1$,
- $x\mapsto -\ln(|x|)/(2\pi)$ *pour* $n=2$,
- $x\mapsto \Gamma(n/2-1)/(4\pi^{n/2}|x|^{n-2})$ *pour* $n\geq 3$.

Notons que pour $n=3$, la fonction donnée a pour expression explicite

$$\frac{1}{4\pi|x|}.$$

Remarquons tout de suite que pour $n=1$, la fonction donnée est clairement localement intégrable et que pour $n\geq 2$, un changement de variables en coordonnées polaires permet d'obtenir également que les fonctions données sont localement intégrables.

• Cela étant, pour $n=1$, on a directement

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}|x|D^2\varphi(x)\,dx &= \int_0^{+\infty}xD^2\varphi(x)\,dx-\int_{-\infty}^0 xD^2\varphi(x)\,dx\\
&= -\int_0^{+\infty}D\varphi(x)\,dx+\int_{-\infty}^0 D\varphi(x)\,dx\\
&= 2\varphi(0).
\end{aligned}$$

• Pour $n=2$, on utilise les coordonnées polaires comme dans l'exemple précédent. Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Posons $\Phi(r,\theta)=\varphi(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$, reprenons les formes des dérivées premières de Φ de l'exemple précédent et dérivons une second fois (mêmes conventions d'abus d'écriture pour alléger les notations). On a successivement

$$\begin{aligned}
D_r\Phi(r,\theta) &= (D_x\varphi)_{re^{ix}}\ \cos(\theta)\ +\ (D_y\varphi)_{re^{ix}}\ \sin(\theta),\\
D_r^2\Phi(r,\theta) &= (D_x^2\varphi)_{re^{ix}}\ \cos^2(\theta)\ +\ (D_y^2\varphi)_{re^{ix}}\ \sin^2(\theta)\ +\ (D_xD_y\varphi)_{re^{ix}}\ \sin(2\theta),\\
D_\theta\Phi(r,\theta) &= -r\,(D_x\varphi)_{re^{ix}}\ \sin(\theta)\ +\ r\,(D_y\varphi)_{re^{ix}}\ \cos(\theta),\\
D_\theta^2\Phi(r,\theta) &= r^2\,(D_x^2\varphi)_{re^{ix}}\ \sin^2(\theta)\ +\ r^2\,(D_y^2\varphi)_{re^{ix}}\ \cos^2(\theta)\\
&\quad -\ r^2\,(D_xD_y\varphi)_{e^{ix}}\ \sin(2\theta)\ -\ r\,(D_x\varphi)_{re^{ix}}\ \cos(\theta)\ -\ r\,(D_y\varphi)_{re^{ix}}\ \sin(\theta)
\end{aligned}$$

et dès lors

$$D_r^2\Phi(r,\theta)+\frac{1}{r^2}D_\theta^2\Phi(r,\theta) \;=\; (\Delta\varphi)_{re^{i\theta}} \;-\; \frac{1}{r}\,D_r\Phi(r,\theta).$$

On obtient alors successivement (se rappeler encore une fois que Φ et ses dérivées sont 2π-périodiques en θ)

$$\begin{aligned}
-(\Delta E)(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\ln(|x|)\,(\Delta\varphi)(x,y)\;dx\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\iint_{]0,+\infty[\times[0,2\pi]} r\,\ln(r)\,(\Delta\varphi)_{re^{i\theta}}\;dr\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\iint_{]0,+\infty[\times[0,2\pi]}\ln(r)\,\left(rD_r^2\Phi(r,\theta)+\frac{1}{r}D_\theta^2\Phi(r,\theta)+D_r\Phi(r,\theta)\right)\;dr\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\iint_{]0,+\infty[\times[0,2\pi]}\ln(r)\,\left(rD_r^2\Phi(r,\theta)+D_r\Phi(r,\theta)\right)\;dr\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}\ln(r)\,\left(rD_r^2\Phi(r,\theta)+D_r\Phi(r,\theta)\right)\;dr\right)d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}\ln(r)\,D_r\left(rD_r\Phi(r,\theta)\right)\;dr\right)d\theta\\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}D_r\Phi(r,\theta)\;dr\right)d\theta\\
&= \varphi(0).
\end{aligned}$$

• Pour $n\geq 3$, une méthode consiste à utiliser la distribution T_α introduite au chapitre précédent. Rappelons donc le résultat suivant. *Si* $0<\alpha<n$ *et*

$$T_\alpha(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)}{|x|^\alpha}\,dx,\quad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

alors

$$\mathcal{F}^{\pm}T_\alpha=\frac{2^{n-\alpha}\pi^{n/2}\Gamma((n-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)}\,T_{n-\alpha}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Delta\varphi(x)}{|x|^{n-2}}\,dx &= T_{n-2}(\Delta\varphi)=(2\pi)^{-n}(\mathcal{F}^-\mathcal{F}^+T_{n-2})(\Delta\varphi)\\
&= (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}^+T_{n-2})(\mathcal{F}^-\Delta\varphi)\\
&= (2\pi)^{-n}\frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma((n-2)/2)}T_2(\mathcal{F}^-\Delta\varphi).
\end{aligned}$$

Cela étant, on a aussi

$$\mathcal{F}_x^-\Delta\varphi \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}e^{-i<x,y>}\,(\Delta)\varphi(y)\;dy \;=\; -|x|^2\,\mathcal{F}_x^-\varphi.$$

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta\varphi(x)}{|x|^{n-2}}\,dx &= -(2\pi)^{-n}\frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma((n-2)/2)}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x^-\varphi\,dx\\ &= -4\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2-1)}\varphi(0).\end{aligned}$$

Exemple 5.2.4 *Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, une solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur $-\Delta+D_t$ est donnée par*

$$T(\varphi)=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/4t}\varphi(t,x)\,dtdx.$$

Notons tout d'abord que la fonction

$$(t,x)\mapsto F(t,x)=(4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/4t}\chi_{]0,+\infty[}(t)$$

est localement intégrable dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. De fait, elle est positive et

$$\int_{\mathbb{R}^n}(4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/4t}\chi_{]0,+\infty[}(t)\,dx=\chi_{]0,+\infty[}(t)$$

est localement intégrable dans $\mathbb{R}$. On montre aussi directement qu'elle définit même distribution tempérée.

Pour montrer que l'on a bien une solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur, on utilise encore la transformation de Fourier. Une première étape consiste à calculer explicitement la transformée de Fourier de T. Nous donnons ici le résultat et renvoyons à l'annexe pour les calculs. On a

$$(\mathcal{F}^+T)(\varphi)=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(\eta,\xi)}{|\xi|^2-i\eta}\,d\eta d\xi.$$

Cela étant, on obtient

$$\begin{aligned}\Big((-\Delta+D_t)T\Big)(\varphi) &= T\Big((-\Delta-D_t)\varphi\Big)\\ &= (2\pi)^{-n-1}(\mathcal{F}^+T)\Big(\mathcal{F}^-\Big((-\Delta-D_t)\varphi\Big)\Big)\\ &= (2\pi)^{-n-1}(\mathcal{F}^+T)_{(\eta,\xi)}\Big((|\xi|^2-i\eta)\mathcal{F}^-\varphi(\eta,\xi)\Big)\\ &= (2\pi)^{-n-1}(\mathcal{F}^+\mathcal{F}^-\varphi)(0)\\ &= \varphi(0).\end{aligned}$$

Exemple 5.2.5 *En ce qui concerne l'opérateur des ondes, on a le résultat suivant, démontré dans l'annexe.*

Pour $n = 1, 2, 3$ des solutions élémentaires E_n de l'opérateur des ondes sont données par

$$\begin{aligned} E_1(\varphi) &= \frac{1}{2}\int_{t\geq|x|}\varphi(t,x)\,dtdx,\\ E_2(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{t\geq|x|}\frac{\varphi(t,x)}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\,dtdx,\\ E_3(\varphi) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi(|x|,x)}{|x|}\,dx. \end{aligned}$$

Remarquons que l'intégrale définissant E_3 est une intégrale triple alors qu'on travaille avec 4 dimensions. Sa forme indique que le support est un cône, ce qui explique le mouvement de propagation des ondes (≪ via des vagues ≫).

5.3 Cas des EDLCC

Dans cette section, on considère les opérateurs différentiels linéaires à coefficient constants, c'est-à-dire les opérateurs du type

$$L(D) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, D^k$$

où m est un naturel non nul et où les a_k sont des complexes, avec $a_m = 1$. On cherche donc une distribution E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$L(D)E = \delta_0.$$

Le polynôme caractéristique associé est le polynôme $L : z \mapsto \sum_{k=1}^{m} a_k\, z^k$.

5.3.1 Méthode dite ≪ variation des constantes ≫

Notons $u_1, \ldots, u_m$ les m solutions fondamentales standard de l'équation homogène sous forme ≪ d'exponentielles-polynômes ≫. La théorie générale des EDLCC dans le cadre des fonctions permet de dire que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice

$$W(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_m(x) \\ Du_1(x) & Du_2(x) & \ldots & Du_m(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D^{m-1}u_1(x) & D^{m-1}u_2(x) & \ldots & D^{m-1}u_m(x) \end{pmatrix}$$

est non nul. Son expression est bien sûr une combinaison de fonctions de type ≪ exponentielles-polynômes ≫. Cela étant, comme la notion de produit d'une distribution par une fonction de classe C_∞ est bien définie, le système d'équations

$$WX = B$$

où B est un vecteur colonne de dimension m dont les éléments sont tous nuls sauf le dernier, lequel est une distribution dans $\mathbb{R}$ (donnée) notée b et X un vecteur colonne de dimension m dont les éléments sont des distributions dans $\mathbb{R}$ (inconnues) est bien défini et admet une solution unique. Si P est un vecteur colonne de dimension m dont les éléments sont respectivement des primitives des éléments de X on montre comme dans le cas des fonctions (même calcul, mais avec des distributions) que la distribution

$$E = \sum_{k=1}^{m} u_k \, P_k$$

vérifie

$$L(D)E \; = \; b.$$

Lorsque $b = \delta_0$, cela donne donc une solution élémentaire.

Mais on peut aller plus loin et déterminer l'expression d'une telle solution puisque l'on sait résoudre explicitement le système $WX = B$. Si $\mathcal{W}$ désigne la matrice des cofacteurs de W, on a en effet

$$X \; = \; W^{-1}B \; = \; \frac{1}{det(W)} \, \widetilde{\mathcal{W}} \, B,$$

ce qui donne (en notant x_j la distribution qui est le $j$ème élément de X)

$$x_j \; = \; \frac{1}{det(W)} \, (\mathcal{W})_{mj} \; \delta_0.$$

Cela étant, comme $f\delta_0 = f(0)\delta_0$, on obtient aussi

$$x_j \; = \; \frac{1}{det(W)(0)} \, (\mathcal{W}(0))_{mj} \; \delta_0, \quad \forall j = 1, \ldots, m.$$

Comme $DY = \delta_0$, primitiver les x_j ne pose donc aucun problème et on trouve donc qu'une solution particulière a la forme

$$E \; = \; \frac{1}{det(W)(0)} \, \sum_{k=1}^{m} (\mathcal{W}(0))_{mk} \; u_k \, Y.$$

En pratique, comme on sait qu'une solution particulière a la forme d'une combinaison linéaire des distributions $u_k \, Y$, on peut bien sûr écrire

$$E \; = \; \sum_{k=1}^{m} c_k \, u_k \, Y,$$

où les c_k sont à déterminer par une méthode standard d'identification des coefficients.

Remarques.

1) Notons que E est tempéré si et seulement si les zéros de L ont tous une partie réelle strictement négative.

2) Notons également que si une solution élémentaire tempérée existe, alors elle est unique. Cela est dû au fait que les solutions de l'équation $L(D)u = \delta_0$ s'écrivent $E + H$, avec H solution de l'équation homogène. Vu sa forme, la fonction H ne définit jamais une distribution tempérée ($H=$ combinaison linéaire d'exponentielles-polynômes définies sur $\mathbb{R}$) sauf au cas où elle est nulle.

5.3.2 Méthode via la transformée de Laplace inverse et les résidus

Lorsque E est tempéré, la recherche de son expression explicite peut s'effectuer via la transformation de Fourier et son analogue la transformée de Laplace (unilatérale ici).

Rappelons le résultat suivant.

Proposition 5.3.1 *Soit F une fraction rationnelle dont la différence entre les degrés des dénominateur et numérateur est au moins 2 et soient $z_1, \ldots, z_J$ les zéros distincts du dénominateur. Alors la fonction f définie explicitement par*

$$f(x) \;=\; \sum_{j=1}^{J} \mathcal{R}es_{z_j}\left(e^{zx}\, F(z)\right)\, \chi_{]0,+\infty[}(x)$$

vérifie

$$\mathcal{L}_p(f) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f(t)\; dt \;=\; F(p)$$

pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(p) > \sup\{\Re(z_1), \ldots, \Re(z_J)\}$.$\square$

Notons aussi que si f et g sont deux fonctions nulles sur $]-\infty, 0]$ qui vérifient $\mathcal{L}_p(f) = \mathcal{L}_p(g)$ pour tout p tel que $\Re(p) > p_0$ alors [7] $f = g$.

Cela étant, si E est une (unique, vu une remarque qui précède) distribution tempérée telle que

$$L(D)E \;=\; \delta_0,$$

en prenant la transformée de Fourier des deux membres de l'égalité, on obtient

$$\sigma\, \widehat{E} \;= 1$$

avec

$$\sigma(y) \;=\; \sum_{k=1}^{m} a_k\, (iy)^k.$$

7. De fait, en prenant $x_0 > p_0$ et $p = ix + x_0$, on a

$$0 = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}\, e^{-x_0 t}\, (f-g)(t)\; dt \;=\; \mathcal{F}_x^-\left(e^{-x_0 \cdot}\,(f-g)(.)\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $e^{-x_0 t}\,(f-g)(t) = 0$ pour tout t et par suite $f = g$.

On a donc

$$\sigma(y) \;=\; L(iy).$$

Lorsque σ n'a pas de zéro réel, on obtient donc

$$\widehat{E} \;=\; \frac{1}{\sigma}$$

et pour trouver E (à 2π près), il suffit de prendre la transformée de Fourier « + » de $1/\sigma$.

Cela étant, le résultat précédent sur la transformée de Laplace nous dit que la fonction f définie par

$$f(x) \;=\; \sum_{j=1}^{J} \mathcal{R}es_{z_j}\left(e^{zx}/L(z)\right)\, \chi_{]0,+\infty[}(x)$$

vérifie

$$\mathcal{L}_p(f) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f(t)\; dt \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-pt}\, f(t)\; dt = \frac{1}{L(p)}$$

pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(p) > \sup\{\Re(z_1), \ldots, \Re(z_J)\}$. Comme E est tempéré, les zéros de L ont tous une partie réelle strictement négative donc on peut prendre l'égalité ci-dessus en $p = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. On obtient ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-iyt}\, f(t)\; dt = \frac{1}{L(iy)} \;=\; \frac{1}{\sigma(y)}$$

donc $E = f$.

5.4 Cas des EDPLCC

On vient de prouver (de façon constructive) qu'à une variable, toute EDLCC possède une solution élémentaire. C'est aussi le cas à plusieurs variables. Ce résultat est dû à Malgrange[8] et Ehrenpreis[9], lesquels on démontré simultanément mais séparément ce résultats vers 1955. « *Les démonstrations originales de Malgrange et Ehrenpreis sont non-constructives car utilisant le théorème de Hahn-Banach. Depuis plusieurs démonstrations constructives ont été trouvées.* » (Extrait de Wikipedia)

Ici, nous allons présenter une preuve qui se trouve dans un ouvrage de Walter Rudin (cf chapitre 8 de [4]), utilisant les variables complexes, la transformation de Fourier et le théorème de Hahn-Banach. Est-ce la preuve de Malgrange-Ehrenpreis ? A vérifier

8. Bernard Malgrange est un mathématicien français né à Paris le 6 juillet 1928 et mort à Grenoble le 5 janvier 2024

9. Leon Ehrenpreis est un mathématicien américain né à New-York le 22 mai 1930 et mort à New-York le 16 août 2010

5.4.1 Notations et lemme fondamental

Soit $\in \mathbb{N}_0$. On désigne par T^n l'ensemble

$$\Big\{ w = (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \ : \ \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R} \Big\} \subset \mathbb{C}^n$$

et, si f est continu sur T^n, on pose

$$\int_{T^n} f(w) \ d\sigma_n(w) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} f(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \ d\theta_1 \ldots d\theta_n.$$

Pour $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note z^α le complexe $z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$ et $|\alpha|$ désigne le naturel $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Le polynôme en la variable $z \in \mathbb{C}^n$

$$P(z) = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \, z^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

est dit de degré N si au moins un des coefficients c_α avec $|\alpha| = N$ est non nul.

Lemme 5.4.1 *[Lemme pour le lemme 5.4.2] Soit $\lambda \mapsto Q(\lambda)$ un polynôme d'une seule variable complexe, de degré N, et soit c le coefficient de λ^N. Alors pour toute fonction entière F (d'une seule variable complexe) on a*

$$|cF(0)| \ \leq \ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| (FQ)(e^{i\theta}) \Big| \ d\theta.$$

Preuve. Ecrivons Q sous la forme

$$Q(\lambda) = c \prod_{k=1}^{N} (\lambda + a_k), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

et définissons alors le polynôme

$$Q_0(\lambda) = c \prod_{k=1}^{N} (1 + \overline{a_k} \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

On a $|Q_0| = |Q|$ sur le cercle unité et $Q_0(0) = c$. A partir de formule intégrale de Cauchy, on obtient alors

$$|(FQ_0)(0)| = |c \, F(0)| \ \leq \ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| (FQ_0)(e^{i\theta}) \Big| \ d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| (FQ)(e^{i\theta}) \Big| \ d\theta$$

□

Lemme 5.4.2 *Soit P un polynôme en la variable $z \in \mathbb{C}^n$ de degré N. Alors il existe une constante strictement positive A, ne dépendant que de P, telle que*

$$|f(z)| \leq \frac{A}{r^N} \int_{T^n} |(fP)(z+rw)| \, d\sigma_n(w)$$

pour toute fonction entière f, tout $z \in \mathbb{C}^n$ et tout $r > 0$.

Preuve. Fixons $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in T^n$ et $r > 0$. Appliquons alors le lemme 5.4.1 avec F et Q définis par

$$F(\lambda) = f(z + r\lambda w), \quad Q(\lambda) = P(z + r\lambda w), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Le polynôme P peut s'écrire

$$P = \sum_{k=0}^{N} P_k$$

où chaque P_k est un polynôme homogène de degré k. Vu la définition de Q, on a alors $c = r^N P_N(w)$ et il s'ensuit que l'on obtient

$$r^N \, |P_N(w) \, f(z)| \ \leq \ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|(fP)(z + re^{i\theta}w)\right| \, d\theta.$$

Cette inégalité étant valable pour tout $w \in T^n$, intégrons sur T^n ; on obtient

$$r^N \, |f(z)| \int_{T^n} |P_N(w)| \, d\sigma_N(w) \ \leq \ \frac{1}{2\pi} \int_{T^n} \int_0^{2\pi} \left|(fP)(z + re^{i\theta}w)\right| \, d\theta \, d\sigma_N(w).$$

Mais par permutation de l'ordre d'intégration puis un changement de variables linéaire, on a aussi

$$\begin{aligned} \int_{T^n} \int_0^{2\pi} \left|(fP)(z + re^{i\theta}w)\right| \, d\theta \, d\sigma_N(w) &= \int_0^{2\pi} \int_{T^n} \left|(fP)(z + re^{i\theta}w)\right| \, d\sigma_N(w) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{T^n} |(fP)(z + rw)| \, d\sigma_N(w) \, d\theta \\ &= 2\pi \int_{T^n} |(fP)(z + rw)| \, d\sigma_N(w). \end{aligned}$$

Finalement, on a obtenu

$$r^N \, |f(z)| \int_{T^n} |P_N(w)| \, d\sigma_N(w) \ \leq \ \int_{T^n} |(fP)(z + rw)| \, d\sigma_N(w).$$

Pour conclure, il suffit alors de prouver que le nombre positif

$$\int_{T^n} |P_N(w)| \, d\sigma_N(w)$$

n'est pas nul. Comme les fonctions exponentielles qui apparaissent dans l'intégrale sont orthogonales dans $L^2([0,2\pi]^n)$, on a

$$\int_{T^n} |P_N(w)|^2 \; d\sigma_N(w) = \sum_{|\alpha|=N} |a_\alpha|^2$$

et, comme P est de degré N, on a aussi

$$\int_{T^n} |P_N(w)|^2 \; d\sigma_N(w) = \sum_{|\alpha|=N} |a_\alpha|^2 > 0.$$

On obtient

$$0 < \int_{T^n} |P_N(w)|^2 \; d\sigma_N(w) \leq \sup_{T^n} |P_N| \int_{T^n} |P_N(w)| \; d\sigma_N(w)$$

et on conclut. □

Passons maintenant à une preuve du théorème de Malgrange-Ehrenpreis, via le théorème d'Hahn-Banach.

Théorème 5.4.3 *Tout opérateur aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants $P(D)$ admet une solution élémentaire.*

Preuve. Soit N le degré de du polynôme $z \mapsto P(z)$.

Considérons le sous espace vectoriel topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$Y = \{P(-D)\varphi \; : \; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$$

et l'application

$$L : P(-D)\varphi \mapsto \varphi(0).$$

Cette application est bien définie sur Y : si $P(-D)\varphi = P(-D)\phi$ pour $\varphi, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$(P(-D)\varphi)^\wedge(y) = P(-iy)\,\widehat{\varphi}(y) = (P(-D)\phi)^\wedge(y) = P(-iy)\,\widehat{\phi}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n;$$

comme cette égalité s'étend à $\mathbb{C}^n$, comme P et $\widehat{\varphi}, \widehat{\phi}$ y sont des fonctions entières et que P n'est pas identiquement nul, on doit avoir $\widehat{\varphi} = \widehat{\phi}$ partout donc $\varphi = \phi$. Cela étant, si on démontre la continuité de L sur Y, sous-espace de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, par le théorème de Hahn-Banach, il s'ensuivra alors que L se prolonge en une fonctionnelle continue E sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et que, quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$(P(D)E)(\varphi) = E(P(-D)\varphi) = L(P(-D)\varphi) = \varphi(0);$$

on aura donc bien obtenu l'existence d'une solution élémentaires E pour $P(D)$.

Démontrons donc la continuité de L.

Effectuons tout d'abord quelques développements.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, une application du lemme 5.4.2 avec la fonction $f = \widehat{\varphi}$ et le polynôme $P^* : z \mapsto P(iz)$ donne, quels que soient $t \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$,

$$|\widehat{\varphi}(t)| \leq A\, r^{-N} \int_{T^n} |\widehat{\varphi} P^*)(t+rw)|\ d\sigma_N(w) = A\, r^{-N} \int_{T^n} \left|(P(-D)\varphi)^\wedge(t+rw)\right|\ d\sigma_N(w).\text{(xx)}$$

Manipulons le second membre. Posons

$$\psi = P(-D)\varphi.$$

Quels que soient $r > 0, t \in \mathbb{R}^n, w \in T^n$, on a

$$\widehat{\psi}(t+rw)\ =\ \left(e^{-i<.,rw>}\psi(.)\right)^\wedge(t)$$

et

$$(1+|t|^2)^N\ \left(e^{-i<.,rw>}\psi(.)\right)^\wedge(t)\ =\ \left((1-\Delta)^N\left(^{-i<.,rw>}\psi(.)\right)\right)^\wedge(t). \qquad \text{(x)}$$

Comme $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, quels que soient $r > 0$ et $w \in T^n$, la fonction de t définie par (x) est intégrable et de carré intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Comme $t \mapsto (1+|t|^2)^{-N}$ est aussi de carré intégrable sur $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le théorème de Fourier donnent

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{\psi}(t+rw)\right|\ dt \\
&\leq\ \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|t|^2)^{-2N}\ dt\right)^{1/2}\ \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+t|^2)^{2N} \left|\widehat{\psi}(t+rw)\right|^2\ dt\right)^{1/2} \\
&=\ \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|t|^2)^{-2N}\ dt\right)^{1/2}\ (2\pi)^{n/2}\ \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|(1-\Delta)^N(e^{-i<t,rw>}\psi(t))\right|^2\ dt\right)^{1/2} \\
&=\ C\ \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|(1-\Delta)^N(e^{-i<t,rw>}\psi(t))\right|^2\ dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Si le support de ψ est inclus dans le compact K, la formule de Leibniz donne alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{\psi}(t+rw)\right|\ dt\ \leq\ C_0(K,r,N) \sup_{|\alpha|\leq 2N, t\in K} |D^\alpha\psi(t)|\,, \forall w \in T^n$$

où $C_0(K,r,N)$ désigne une constante qui ne dépend que de K, r, N (on pourrait même considérer que l'inégalité est vraie pour tout $r \in [0,R]$ avec C_0 qui ne dépend que de K, R, N).

Revenons enfin à la continuité de L. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et soit $\psi = P(-D)\varphi \in Y$ à support dans K. Comme

$$\varphi(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(t)\ dt$$

l'inégalité (xx)

$$|\widehat{\varphi}(t)| \leq A\, r^{-N} \int_{T^n} \left|(P(-D)\varphi)^\wedge(t+rw)\right|\ d\sigma_N(w) = A\, r^{-N} \int_{T^n} \left|\widehat{\psi}(t+rw)\right|\ d\sigma_N(w)$$

donne

$$|\varphi(0)| = |L(\psi)| \leq \frac{A}{(2\pi)^n r^N} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{T^n} \left| \widehat{\psi}(t+rw) \right| \; d\sigma_N(w) \; dt$$

donc, en vertu des développements précédents,

$$\begin{aligned} |\varphi(0)| = |L(\psi)| &\leq \frac{A}{(2\pi)^n r^N} \int_{T^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{\psi}(t+rw) \right| \; dt \; d\sigma_N(w) \\ &= C_0(K,r,N) \, \frac{A}{(2\pi)^n r^N} \sup_{|\alpha| \leq 2N, t \in K} |D^\alpha \psi(t)| \; \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} d\theta_1 \dots d\theta_n \\ &= C_0(K,r,N) \, \frac{A}{(2\pi)^n r^N} \sup_{|\alpha| \leq 2N, t \in K} |D^\alpha \psi(t)| \end{aligned}$$

pour tout $\psi \in Y$ à support dans K. D'où la conclusion. $\square$

Chapitre 6

Annexe

6.1 Formule intégrale de Taylor

Propriété 6.1.1 *Soient $p \in \mathbb{N}_0$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C_p(\Omega)$. Alors pour tous $x, y \in \Omega$ tels que le segment qui les relie soit inclus dans Ω, on a, en posant $h = y - x$,*

$$f(y) \;=\; \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{|\alpha|=j} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\,(D^\alpha f)(x) \;+\; p \sum_{|\alpha|=p} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{p-1}\,(D^\alpha f)(x+th)\;dt.$$

Preuve. Procédons par récurrence sur p.

Pour $p = 1$, par le théorème d'intégration par variation de primitive et celui de dérivation des fonctions composées, on a directement

$$f(y) - f(x) \;=\; \int_0^1 D\Big(f(x+th)\Big)\;dt \;=\; \sum_{k=1}^{n} h_k \int_0^1 (D_k f)(x+th)\;dt,$$

ce qui est bien l'égalité annoncée.

Supposons alors que l'égalité est correcte pour p et démontrons qu'elle l'est aussi pour $p+1$. On doit donc montrer que

$$f(y) \;=\; \sum_{j=0}^{p} \sum_{|\alpha|=j} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\,(D^\alpha f)(x) \;+\; (p+1) \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{p}\,(D^\alpha f)(x+th)\;dt.$$

L'idée est de partir de

$$(p+1) \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{p}\,(D^\alpha f)(x+th)\;dt$$

et de faire apparaître une dérivée de type $D(F(x+th))$ avec F dérivée de f d'ordre p et d'intégrer par variation de primitive comme pour le cas $p = 1$. On retombera alors sur une somme qui ne fait plus apparaitre que des dérivées d'ordre inférieur ou égal à p et on utiliser alors l'hypothèse de récurrence. Pour cela, montrons que quel que soit $q \in \mathbb{N}_0$, on a

$$(q+1)! \sum_{|\alpha|=q+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f \; = \; \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_{q+1}=1}^{n} h_{k_1} \ldots h_{k_{q+1}} D_{k_1} \ldots D_{k_{q+1}} f.$$

Les sommes du second membre décrivent tous les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ avec $|\alpha| = q+1$ et où α_j est égal au nombre de k_l égaux à j. Plusieurs termes sont les mêmes puisque l'on peut permuter les dérivées et aussi bien sûr le produit des h_l sans changer la valeur de l'expression. Le nombre de permutations de $k_1, \ldots, k_{q+1}$ lorsqu'ils sont tous différents est égal $(q+1)!$. Mais dans la somme ci-dessus il se peut que plusieurs k_l soient égaux (ce nombre étant α_j avec les notations introduites ci-dessus) ; on a donc finalement $(q+1)!/(\alpha_1! \ldots \alpha_n!)$ termes qui s'écrivent $h^\alpha D^\alpha f$. Ainsi,

$$\sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_{q+1}=1}^{n} h_{k_1} \ldots h_{k_{q+1}} D_{k_1} \ldots D_{k_{q+1}} f \; = \; (q+1)! \sum_{|\alpha|=q+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f.$$

Cela étant, on obtient

$$\begin{aligned}
&(p+1) \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^p \, (D^\alpha f)(x+th) \; dt \\
= \;& \frac{1}{p!} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_{p+1}=1}^{n} h_{k_1} \ldots h_{k_{p+1}} \int_0^1 (1-t)^p \, (D_{k_1} \ldots D_{k_{p+1}} f)(x+th) \; dt \\
= \;& \frac{1}{p!} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_p=1}^{n} h_{k_1} \ldots h_{k_p} \sum_{k_{p+1}=1}^{n} h_{k_{p+1}} \int_0^1 (1-t)^p \, \Big(D_{k_{p+1}} (D_{k_1} \ldots D_{k_p} f) \Big) (x+th) \; dt \\
= \;& \frac{1}{p!} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_p=1}^{n} h_{k_1} \ldots h_{k_p} \int_0^1 (1-t)^p \, D \Big((D_{k_1} \ldots D_{k_p} f)(x+th) \Big) \; dt \\
= \;& -\frac{1}{p!} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_p=1}^{n} h_{k_1} \ldots h_{k_p} \, (D_{k_1} \ldots D_{k_p} f)(x) \\
& + \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_p=1}^{n} h_{k_1} \ldots h_{k_p} \int_0^1 (1-t)^{p-1} \, (D_{k_1} \ldots D_{k_p} f)(x+th) \; dt \\
= \;& -\sum_{|\alpha|=p} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x) \; + \; p \sum_{|\alpha|=p} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} \, (D^\alpha f)(x+th) \; dt.
\end{aligned}$$

On peut alors conclure par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{p}\sum_{|\alpha|=j}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\,(D^\alpha f)(x) \;+\; (p+1)\sum_{|\alpha|=p+1}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^p\,(D^\alpha f)(x+th)\;dt\\
&= \sum_{j=0}^{p}\sum_{|\alpha|=j}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\,(D^\alpha f)(x) - \sum_{|\alpha|=p}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\,D^\alpha f(x) \;+\; p\sum_{|\alpha|=p}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^{p-1}\,(D^\alpha f)(x+th)\;dt\\
&= \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{|\alpha|=j}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\,(D^\alpha f)(x) + \;p\sum_{|\alpha|=p}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^{p-1}\,(D^\alpha f)(x+th)\;dt\\
&= f(y).
\end{aligned}$$

□

6.2 Résultat auxiliaire

Rappelons qu'il n'existe pas de fonction non nulle $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que [1]

$$\int_{\mathbb{R}} x^\alpha\,\psi(x)\;dx \;= 0\;\forall\alpha\in\mathbb{N}.$$

De fait, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction $z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{ixz}\psi(x)\,dx$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et par conséquent elle se développe en série de puissances (en 0). Il s'ensuit que

$$\mathcal{F}^+_y\psi \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{y^k}{k!}\,(D^k\mathcal{F}^+\psi)(0), \quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Comme les dérivées de $\mathcal{F}^+\psi$ en 0 sont égales à un multiple près aux moments $\int_{\mathbb{R}} x^\alpha\,\psi(x)\,dx$, on obtient $\mathcal{F}^+\psi = 0$ et par suite $\psi = 0$.

Mais si on se limite à un nombre fini de moments nuls, il est aisé de trouver de telles fonctions ψ.

Soit donc $k \in \mathbb{N}$. Pour $n = 1$, la fonction $\psi = D^k\varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle convient. Pour $j \leq k$ on a en effet :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} x^j\,D^k\varphi(x)\;dx &= -j\int_{\mathbb{R}} x^{j-1}\,D^{k-1}\varphi(x)\;dx\\
&= \dots\\
&= (-1)^j j!\int_{\mathbb{R}} D^{k-j}\varphi(x)\;dx\\
&= 0.
\end{aligned}$$

1. Les intégrales qui interviennent ici sont appelées les *moments* de f.

Dans le cas général, la fonction $\psi = D^k\varphi_1 \ldots D^k\varphi_n$ avec $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle ($j = 1, \ldots, n$) convient. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$ on a en effet

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \, \psi(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \, D^k\varphi_1(x_1) \ldots D^k\varphi_n(x_n) \, dx \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} x_j^{\alpha_j} \, D^k\varphi_j(x_j) \, dx_j \\ &= 0.\end{aligned}$$

6.3 Limites de distributions

REVOIR

6.3.1 Rappels sur les espaces de Fréchet

L'étude des limites de distributions nécessite la connaissance d'un résultat de la théorie des espaces de Fréchet, le théorème de Banach-Steinhaus. Etablissons ce théorème.

Soit E un espace vectoriel complexe. Une *semi-norme* p sur E est une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que

$$p(cf) = |c|p(f) \quad , \quad p(f+g) \leq p(f) + p(g)$$

pour tous $f, g \in E$ et $c \in \mathbb{C}$.

Si p est une semi-norme, on a $p(0) = 0$, $p(e) \geq 0$ pout tout $e \in E$,

$$p\left(\sum_{j=1}^N c_j f_j\right) \leq \sum_{j=1}^N |c_j| p(f_j)$$

pour toute combinaison linéaire d'éléments de E et

$$|p(f) - p(g)| \leq p(f-g)$$

pour tous $f, g \in E$.

Une semi-norme p sur E est une *norme* si $p(f) = 0$ implique $f = 0$.

Si $r > 0$ on pose

$$B_p(r) = \{f \in E : p(f) < r\}, \quad b_p(r) = \{f \in E : p(f) \leq r\}.$$

Par exemple, si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, l'expression

$$p_k(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \;, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K),$$

définit une norme sur $\mathcal{D}(K)$ pour tout entier k. Si u est une distribution dans un ouvert Ω contenant K,

$$p(\varphi) = |u(\varphi)| \ , \quad \varphi \in \mathcal{D}(K),$$

définit une semi-norme sur $\mathcal{D}(K)$.

Un *espace de Fréchet* est un espace vectoriel complexe E muni d'une suite de semi-normes p_m, $m \in \mathbb{N}$, telles que

(i) E est séparé : si $f \in E$ et $p_m(f) = 0$ pour tout m alors $f = 0$,

(ii) la suite p_m est croissante : $p_m(f) \leq p_{m+1}(f)$, $f \in E$, $m \in \mathbb{N}$,

(iii) toute suite de Cauchy de E est convergente : si f_k est une suite d'éléments de E telle que

$$p_m(f_r - f_s) \to 0 \ \text{ si } \ r, s \to \infty$$

pour tout m fixé, alors il existe un élément $f \in E$ tel que

$$p_m(f - f_k) \to 0 \ \text{ si } \ k \to \infty$$

pour tout m fixé.

Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(K)$ muni des semi-normes p_k définies ci-dessus est un espace de Fréchet en vertu du théorème 2.1.3. Sauf mention du contraire, nous munirons toujours $\mathcal{D}(K)$ de ces semi-normes.

Une semi-norme p sur un espace de Fréchet E défini par les semi-normes p_m, $m \in \mathbb{N}$, est dite *continue* s'il existe une constante C et un entier m tels que

$$p(f) \leq C p_m(f) \ , \quad f \in E.$$

Un espace de Fréchet est un espace métrique complet pour la distance

$$d(f, g) = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-m} \frac{p_m(f-g)}{1 + p_m(f-g)}.$$

L'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité

$$\frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$$

valable si $x, y \geq 0$.

Le théorème que nous avons en vue est le suivant.

Théorème 6.3.1 (Banach-Steinhaus) *Si* Π *est un ensemble de semi-normes continues sur un espace de Fréchet* E *tel que*

$$\sup_{p \in \Pi} p(f) < +\infty \tag{6.1}$$

pour tout $f \in E$ *alors*

$$\pi(f) = \sup_{p \in \Pi} p(f)$$

est une semi-norme continue sur E.

Donnons deux démonstrations de ce théorème. La première est une application du théorème de Baire. La seconde est autonome mais plus technique.

Théorème 6.3.2 (Baire) *Dans un espace métrique complet, toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.*

Preuve. On désigne par $B(x,r)$ (resp. $b(x,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r.

On procède par l'absurde. Soit F_m une suite de fermés d'intérieur vide d'un espace métrique complet E. Supposons que $F = \cup_{m=1}^{\infty} F_m$ est d'intérieur non vide. Il existe $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que $b(x_0, r_0) \subset F$.

Puisque F_1 est d'intérieur vide, il existe $x_1 \in B(x_0, r_0) \setminus F_1$. Comme F_1 est fermé, il existe $r_1 \in]0, r/2[$ tel que $b(x_1, r_1) \subset b(x_0, r_0) \setminus F_1$.

Puisque F_2 est d'intérieur vide, il existe $x_2 \in B(x_1, r_1) \setminus F_2$. Comme F_2 est fermé, il existe $r_2 \in]0, r_1/2[$ tel que $b(x_2, r_2) \subset b(x_1, r_1) \setminus F_2$.

Puisque F_3 est d'intérieur vide, il existe $x_3 \in B(x_2, r_2) \setminus F_3$. Comme F_3 est fermé, il existe $r_3 \in]0, r_2/2[$ tel que $b(x_3, r_3) \subset b(x_2, r_2) \setminus F_3$.

......

La suite x_m ainsi construite est de Cauchy car de

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq r_m \leq \frac{r_{m-1}}{2} \leq \ldots \leq 2^{-m} r_0.$$

on déduit

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{k=p}^{q-1} 2^{-k} \leq 2^{-p+1}$$

si $p < q$. La suite x_m converge donc vers un élément x de E.

Par construction $b(x_m, r_m) \subset \ldots \subset b(x_0, r_0) \subset F$ donc $x \in F$. De même, si $m \geq p \geq 1$, on a $b(x_m, r_m) \subset b(x_p, r_p) \subset b(x_{p-1}, r_{p-1}) \setminus F_p$. Ainsi $x \notin F_p$ pour tout p ce qui est absurde.
□

Première démonstration du théorème 6.3.1. On désigne comme ci-dessus par p_m, $m \in \mathbb{N}$, une suite de semi-normes qui définit E.

Puisque Π est un ensemble de semi-normes continues, l'ensemble

$$F_k = \{f \in E : \pi(f) \leq k\} = \bigcap_{p \in \Pi} \{f \in E : p(f) \leq k\}$$

est fermé pour tout entier positif k. Par l'hypothèse (6.1), l'union des F_k est E. Cela étant, le théorème de Baire affirme qu'il existe un entier k tel que F_k soit d'intérieur non vide.

Il existe donc $g \in E$, un entier m et $r > 0$ tels que $g + b_{p_m}(r) \subset F_k$. Si $p_m(f) \leq r$ alors $g + f \in F_k$ donc $\pi(f + g) \leq k$. Puisque g appartient aussi à F_k, on obtient

$$\pi(f) \leq \pi(f + g) + \pi(g) \leq 2k.$$

Ceci prouve que

$$\pi(f) \leq \frac{2k}{r}\, p_m(f)$$

pour tout f donc π est continu. $\square$

Deuxième démonstration du théorème 6.3.1. Nous utilisons une technique connue sous le nom de bosse mobile.

Il est immédiat que π est une semi-norme sur E. Supposons que π n'est pas continu.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}_0$, il existe donc $\pi_m \in \Pi$ et $f_m \in E$ tels que

$$\pi_m(f_m) > m p_m(f_m).$$

Puisque Π est un ensemble de semi-normes continues, il existe des constantes C_m et une suite d'entiers μ_m tels que

$$\pi_m(f) \leq C_m p_{\mu_m}(f)\ , \quad f \in E,\ m \geq 1.$$

On pose $C_0 = \mu_0 = 1$. On peut supposer que les suites C_m et μ_m sont croissantes.

Montrons qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers ν_m, $m \geq 0$, telle que

$$\nu_m \geq \mu_{\nu_{m-1}}\ , \quad m \geq 1,$$

et

$$\pi_{\nu_m}(g_1 + \cdots + g_m) \geq m, \quad m \geq 1$$

où

$$g_m = \frac{2^{1-m}}{C_{\nu_{m-1}}}\, \frac{\nu_m f_{\nu_m}}{\pi_{\nu_m}(f_{\nu_m})}, \quad m \geq 1.$$

On prend $\nu_0 = 0$ et $\nu_1 = 1$. Si $\nu_0, \ldots, \nu_{m-1}$ ont été choisis, il suffit de prendre ν_m tel que

$$\nu_m > \sup(\nu_{m-1}, \mu_{\nu_{m-1}})$$

et

$$\nu_m \geq 2^{m-1} C_{\nu_{m-1}} \left(m + \sup_{p \in \Pi} p(g_1 + \cdots + g_{m-1}) \right).$$

De fait, on a alors

$$\begin{aligned} \pi_{\nu_m}(g_1 + \cdots + g_m) &\geq \pi_{\nu_m}(g_m) - \pi_{\nu_m}(g_1 + \cdots + g_{m-1}) \\ &\geq \frac{2^{1-m}}{C_{\nu_{m-1}}}\, \nu_m - \pi_{\nu_m}(g_1 + \cdots + g_{m-1}) \geq m. \end{aligned}$$

La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k$$

converge dans E. De fait, pour tout entier m on a, si $s \geq r \geq m$,

$$\begin{aligned} p_m\big(\sum_{k=r}^{s} g_k\big) &\leq \sum_{k=r}^{s} p_m(g_k) \leq \sum_{k=r}^{s} p_{\nu_k}(g_k) \\ &\leq \sum_{k=r}^{s} \frac{2^{1-k}}{C_{\nu_{k-1}}}\, \nu_k \frac{p_{\nu_k}(f_{\nu_k})}{\pi_{\nu_k}(f_{\nu_k})} \leq \sum_{k=r}^{s} 2^{1-k}. \end{aligned}$$

La dernière majorante tend vers 0 si r et s tendent vers $+\infty$. Notons g la limite de cette série. Si $k > m$, on a

$$\begin{aligned} \pi_{\nu_m}(g_k) &= \frac{2^{1-k}\nu_k}{C_{\nu_{k-1}}}\, \frac{\pi_{\nu_m}(f_{\nu_k})}{\pi_{\nu_k}(f_{\nu_k})} \\ &\leq 2^{1-k}\frac{C_{\nu_m}}{C_{\nu_{k-1}}}\frac{p_{\mu_{\nu_m}}(f_{\nu_k})}{p_{\nu_k}(f_{\nu_k})} \leq 2^{1-k} \end{aligned}$$

car la suite ν_m est strictement croissante. Cela étant,

$$\begin{aligned} \pi_{\nu_m}(g) &\geq \pi_{\nu_m}(g_1 + \cdots + g_m) - \sum_{k=m+1}^{+\infty} \pi_{\nu_m}(g_k) \\ &\geq m - \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{1-k} = m - 2^{1-m}. \end{aligned}$$

La suite $\pi_{\nu_m}(g)$ n'est donc pas bornée. Ceci contredit l'hypothèse car $\pi_{\nu_m} \in \Pi$ pour tout m. $\Box$

6.3.2 Convergence des distributions

Le premier résultat est une conséquence immédiate du théorème de Banach-Steinhaus. A REVOIR (STRUCTURE!!!)

Théorème 6.3.3 *Si u_m est une suite de distributions dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ telle que la limite*

$$u(\varphi) = \lim_{m\to+\infty} u_m(\varphi)$$

existe pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $u \in D'(\Omega)$. De plus, si K est un compact de Ω, il existe des constantes C, k, telles que

$$|u_m(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi|\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K),$$

pour tout m.

Preuve. Puisque u_m est une distribution pour tout m, u est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour tout compact K de Ω et tout entier m,

$$q_m(\varphi) = |u_m(\varphi)|\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K),$$

est une semi-norme continue sur $\mathcal{D}(K)$ car u_m est une distribution. Ces semi-normes vérifient les hypothèses du théorème 6.3.1. Il existe donc des constantes C, k telles que

$$\sup_{m\in\mathbb{N}_0} q_m(\varphi) \le C \sup_{|\alpha|\le k}\sup_K |D^\alpha\varphi|\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

Il s'ensuit que

$$|u(\varphi)| \le C \sup_{|\alpha|\le k}\sup_K |D^\alpha\varphi|\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

Ceci prouve que u est une distribution. □

Définition 6.3.4 *On dit qu'une suite $u_m \in D'(\Omega)$ converge vers u dans $D'(\Omega)$ si*

$$u(\varphi) = \lim_{m\to+\infty} u_m(\varphi)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

6.4 Transformation de Fourier

A REVOIR

On a

$$(\mathcal{F}^\pm T_\alpha)(\varphi) = \lim_{\epsilon\to0+}\int \frac{e^{-\epsilon|x|^2}}{|x|^\alpha}\,dx\int e^{\pm ix.\xi}\varphi(\xi)d\xi = \lim_{\epsilon\to0+}\int\varphi(\xi)d\xi\int e^{\pm ix.\xi}\frac{e^{-\epsilon|x|^2}}{|x|^\alpha}\,dx.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\int e^{\pm ix.\xi}\frac{e^{-\epsilon|x|^2}}{|x|^\alpha}\,dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int e^{\pm ix.\xi-\epsilon|x|^2}dx\int_0^{+\infty} e^{-t|x|^2}t^{\alpha/2-1}dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1}dt\int e^{\pm ix.\xi-(\epsilon+t)|x|^2}dx\\
&= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha/2-1}}{(\epsilon+t)^{n/2}}\,e^{-|\xi|^2/4(\epsilon+t)}dt.
\end{aligned}$$

Si $\alpha - n < \delta < \alpha$, on a

$$\begin{aligned}
|\varphi(\xi)|\frac{t^{\alpha/2-1}}{(\epsilon+t)^{n/2}}\,e^{-|\xi|^2/4(\epsilon+t)} &= \frac{t^{\alpha/2-1}}{(\epsilon+t)^{(\alpha-\delta)/2}}\frac{|\varphi(\xi)|}{|\xi|^{n-\alpha+\delta}}\left(\frac{|\xi|^2}{\epsilon+t}\right)^{\frac{n-\alpha+\delta}{2}}e^{-|\xi|^2/4(\epsilon+t)}\\
&\le C_\delta\, t^{\delta/2-1}\,\frac{|\varphi(\xi)|}{|\xi|^{n-\alpha+\delta}}.
\end{aligned}$$

Si $t \in]0,1[$, on prend $0 < \delta < \alpha$. Si $t > 1$, on prend $\alpha - n < \delta < 0$. Le premier membre est donc majoré par une fonction intégrable dans $\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$ indépendante de ϵ. Par le théorème de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^{\pm} T_\alpha)(\varphi) &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \int \varphi(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1-n/2} e^{-|\xi|^2/4t} dt \\ &= \frac{2^{n-\alpha}\pi^{n/2}\Gamma((n-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)} \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^{n-\alpha}} d\xi.\end{aligned}$$

6.5 Solutions élémentaires

A REVOIR

Calcul de la transformée de Fourier de T, candidat solution élémentaire de l'équation de la chaleur.

On a

$$(\mathcal{F}^{+} T)(\varphi) = \int_0^{+\infty} (4\pi t)^{-n/2}\, dt \int e^{-|x|^2/4t}\, dx \int e^{i(t\eta + x.\xi)} \varphi(\eta, \xi)\, d\eta d\xi$$

$$= \int_0^{+\infty} dt \int \varphi(\eta,\xi) e^{-t|\xi|^2 + it\eta}\, d\eta d\xi = \lim_{N \to +\infty} \int \varphi(\eta,\xi)\, d\eta d\xi \int_0^N e^{-t|\xi|^2 + it\eta}\, dt$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \int \varphi(\eta,\xi) \frac{1 - e^{-N(|\xi|^2 - it\eta)}}{|\xi|^2 - i\eta}\, d\eta d\xi = \int \frac{\varphi(\eta,\xi)}{|\xi|^2 - i\eta}\, d\eta d\xi.$$

La dernière égalité résulte du théorème de Lebesgue. La fonction $(\eta, \xi) \mapsto 1/(|\xi|^2 - i\eta)$ est localement intégrable dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ car

$$\int_{-1}^{1} |\frac{1}{|\xi|^2 - i\eta}|\, d\eta = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|\xi|^4 + |\eta|^2}}\, d\eta = 2 \operatorname{arcsh}(\frac{1}{|\xi|^2})$$

et

$$\lim_{r \to 0^+} r^{n-1} \operatorname{arcsh}(1/r^2) = \lim_{r \to +\infty} \frac{\operatorname{arcsh} r}{r^{(n-1)/2}} = \lim_{r \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+r^2}(n-1) r^{(n-3)/2}} = 0.$$

(on a même $\lim_{r \to +\infty} \frac{\operatorname{arcsh}(r)}{\ln(r)} = 1$.)

Références

[1] Dautray R. et Lions J.L., *Analyse mathématique et calcul numérique 1,2,3*, Masson, 1987.

[2] Egorov Yu. V. et Shubin M.A., *Partial Differential Equations I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 30, Springer, 1992.

[3] Hörmander L., *The analysis of linear partial differential equations*, Springer, 1983-1984.

[4] Rudin W. COMPLETER

[5] Schwartz L., *Théorie des distributions*, Hermann, 1950.

[6] Taylor M. E. *Partial Differential equations*, Applied Mathematical Sciences 115, 116,117, Springer, 1997.