Enoncés

1 « Fonctions test »

1.1 Exercices de base

Exercice 1. Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1(\Omega)$. Démontrer[1] que $f = 0$ presque partout dans Ω si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \ \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,{}^2.$$

Exercice 2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Examiner la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des suites φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ suivantes, données explicitement.

$$(a)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(x)}{m} \qquad (b)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(x/m)}{m} \quad (c)\ \varphi_m(x) = m\,\varphi(mx)$$
$$(d)\ \varphi_m(x) = m\,\varphi(x/m) \quad (e)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(mx)}{m}$$

Exercice 3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et soit $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ on pose

$$\varphi_m(x) = m\left(\varphi(x + h/m) - \varphi(x)\right), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

- Montrer que $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^n$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.
- Montrer que lorsque m tend vers $+\infty$, la suite φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction, à déterminer.

Exercice 4. Construire une suite φ_m $(m \in \mathbb{Z})$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

- en tout point $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{m \in \mathbb{Z} : \varphi_m(x) \neq 0\}$ est fini
- quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) = 1.$$

Exercice 5. Soit φ_m $(m \in \mathbb{N})$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{2^m} \exp\left(-\frac{1}{1 - x^2/m^2}\right) \ \text{ si } |x| < m, \ 0 \text{ sinon.}$$

1. Voir le syllabus de MATH0511, Analyse harmonique
2. c'est-à-dire si et seulement si $u_f = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

- Montrer que pour tout m on a $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
- Montrer que, pour chaque naturel $k \geq 0$, la suite de fonctions $D^k\varphi_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $g_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, à déterminer. A-t-on convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$? Justifier.

1.2 Autres

Exercice 6. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Prouver que pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 \, dx \;=\; -2\Re\left(\int_{\mathbb{R}^n} x_k \varphi(x) D_k \overline{\varphi}(x)\, dx\right).$$

En déduire que si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe $C > 0$ tel que (inégalité de Poincaré [3])

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2 \, dx \leq C \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega |D_k\varphi(x)|^2 \, dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

2 Quelques manipulations de base

2.1 Exercices de base

Exercice 7. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont des distributions et donner leur support.

(a) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (D\varphi)(1)$ (b) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (\varphi(0))^2$ (c) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(0) + D\varphi(1)$

(d) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx$ (e) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 |\varphi(x)|dx$ (f) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)$

(g) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n)$ (h) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(1/n)$ (i) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(1/n)}{n}$

(j) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(1/n)}{n^2}$ (k) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (D^n\varphi)(0)$ (l) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(0)$

(m) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(n)$ (n) $\varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (D^n\varphi)(1/n)$

---

3. En mathématiques, l'inégalité de Poincaré (du nom du mathématicien français Henri Poincaré) est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie de son domaine de définition. Ces estimations sont d'une grande importance pour la méthode moderne directe du calcul des variations.

Exercice 8. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\lambda > -1$ la fonction

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

Montrer alors que pour $\Re\lambda > -1$ on a

$$\int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx = \int_0^1 x^\lambda(\varphi(x) - \varphi(0))\, dx + \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda + 1}$$

et en déduire que l'on peut étendre la définition de x_+^λ aux $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\Re\lambda > -2$ et $\lambda \neq -1$.

Exercice 9. Montrer que l'application (≪ partie finie de $\chi_{]0,+\infty[}(x)/x$ ≫)

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \ln(\varepsilon)\, \varphi(0) \right)$$

définit une distribution.

Exercice 10. Montrer que l'application (≪ partie finie de $1/x^2$ ≫)

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$

définit une distribution et la comparer avec la ≪ valeur principale de $1/x$ ≫.

Exercice 11. Déterminer les distributions u dans $\mathbb{R}$ qui vérifient les équations suivantes.

(a) $xu = 0$

(b) $xu = D^k\delta_0$ avec $k \in \mathbb{N}$

(c) $x^2u = \delta_0$

(d) $x^n u = \delta_0$ avec $n \in \mathbb{N}$

(e) $(x - r)u = \delta_s$ avec $r, s \in \mathbb{R}$, $r \neq s$

Exercice 12. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes.

$$(a)\ xu = 2u \qquad (b)\ x^2u = u.$$

2.2 Autres

Exercice 13. Soit u une distribution dans $\mathbb{R}$ et f une fonction $C_\infty(\mathbb{R})$ telle que $f = 0$ sur le support de u. A-t-on toujours $fu = 0$? Pourquoi ?

Exercice 14. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ démontrer que la distribution de Dirac δ_a n'est pas une distribution associée à une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Montrer qu'il n'existe pas de distribution u dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec $e^{1/x}$ sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire telle que

$$u(\varphi) = \int_0^{+\infty} e^{1/x}\varphi(x)dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[).$$

Exercice 16. Soit $k \in \mathbb{N}_0$. Montrer que l'application (« partie finie ou principale de $1/x^{k+1}$ »)

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^{k+1}}\, dx - 2 \sum_{l=0, k-l\, impair}^{k-1} \frac{1}{(k-l)\, l!} \frac{(D^l\varphi)(0)}{\varepsilon^{k-l}} \right)$$

est bien définie. En la comparant avec la « partie finie (ou principale) de $1/x$ », montrer que c'est une distribution.

Exercice 17. On considère l'application $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x)\, dx.$$

Montrer que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, en déterminer le support et en déduire que u n'est pas associé à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

3 Dérivation et équations différentielles

3.1 Exercices de base

Exercice 18. Simplifier au maximum les expressions suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$(a)\ e^{2x}\delta_0 + e^x D\delta_0, \qquad (b)\ x^p D^q \delta_0 \ \text{ pour } \ p, q \in \mathbb{N}, \qquad (c)\ D\big(\cos(x)\delta_\pi\big).$$

Exercice 19. On donne $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$, et on considère la distribution u associée à f. Déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de u.

Exercice 20. On reprend la distribution de l'exercice **17**. Calculer $D_x u - D_y u$.

Exercice 21. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la distribution associée à la fonction localement intégrable

$$E(x,t) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si } t - |x| \leq 0. \end{cases}$$

Calculer $D_t^2 u - D_x^2 u$.

Exercice 22. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes.

$(a)\ D^2u - 2Du + u = 0 \quad (b)\ Du + u = \delta_0 \quad (c)\ D^2u = \delta_0 \quad (d)\ xDu + u = \delta_0 \quad (e)\ x^2Du = \delta_0$

Exercice 23. Si a et b sont deux complexes fixés, on considère l'opérateur différentiel

$$P = D^2 + aD + b.$$

Soient f et g deux fonctions de $C_2(\mathbb{R})$ telles que $(Pf)(x) = (Pg)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = g(0)$ et $Df(0) - Dg(0) = 1$. On pose

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si} \quad x \leq 0, \\ -g(x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que h définit une distribution u et calculer Pu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. En déduire la solution la plus générale dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation

$$D^2u + 2Du - 3u = \delta_0.$$

3.2 Autres

Exercice 24. Soit $I =]a,b[$ ainsi que $f, g \in C_\infty(I)$. Montrer que si $u \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie l'équation

$$Du + fu = g$$

alors u est associée à une fonction de classe C_∞ sur I.

Exercice 25. EDLCC homogène dans les distributions : rien de plus !

1. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient $D^p u = 0$ (p étant un naturel non nul).
2. Montrer que $D(fu) = f\,Du + (Df)\,u$ pour tous $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C_\infty(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $D^p(e^{-cx}u) = e^{-cx}(D-c)^p u$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4. Soient $p \in \mathbb{N}_0$ et $c \in \mathbb{C}$. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient $(D-c)^p u = 0$.

Soit $L(D) = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha D^\alpha$ un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants. Déduire de ce qui précède que la solution la plus générale de l'équation homogène $L(D)(u) = 0$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$u = u_{P_{\alpha_1 - 1}(x)e^{a_1 x} + \ldots + P_{\alpha_m - 1}(x)e^{a_m x}}$$

où

- $a_1, \ldots, a_m$ sont les zéros distincts du polynôme $L(z) = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha z^\alpha$,
- pour tout $j \leq m$, α_j est la multiplicité de a_j comme zéro de $L(z)$,
- pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, P_α est un polynôme de degré inférieur ou égal à α.

Exercice 26. A propos d'annulation des dérivées à n dimension.
• Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $u \in \mathcal{D}'(\omega \times I)$ et $D_{x_n} u = 0$ alors il existe $u_0 \in \mathcal{D}'(\omega)$ tel que

$$u(\varphi) = \int_I u_0(\varphi(., x_n))\, dx_n$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega \times I)$.
• Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $D_{x_j} u = 0$ pour $j = 1, \ldots, n$ alors u est la distribution associée à une fonction constante.
• Corollaire : i $f, g_1, \ldots, g_n$ sont des fonctions continues dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $D_{x_j} u_f = u_{g_j}$ pour tout j alors $f \in C_1(\Omega)$ et $D_{x_j} f = g_j$.

4 Limites

4.1 Exercices de base

Exercice 27. Soient les suites f_m, g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ définies par

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1/m \\ m & \text{si } |x| < 1/m \end{cases}$$

et

$$g_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1/m \\ m^2 & \text{si } |x| < 1/m. \end{cases}$$

Montrer que ces suites convergent presque partout vers 0 dans $\mathbb{R}$, que la suite u_{f_m} $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $2\delta_0$ et que la suite $u_{g_m}(m \in \mathbb{N}_0)$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 28 (Cf les ≪ unités approchées ≫ de composition)**.** Soit φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, intégrables d'intégrale égale à 1 et telles que $supp(\varphi_m) \subset [-1/m, 1/m]$ pour tout m. Si on désigne par u_m la distribution associée à φ_m, montrer qu'au sens distributions, on a

$$\lim_{m\to+\infty} u_m = \delta_0.$$

On verra plus loin (composition) que la distribution de Dirac δ_0 est le neutre pour le produit de composition.

Exercice 29. Si elles existent, déterminer les limites dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des suites de distributions suivantes.

(a) $m^2(\delta_{1/m} - 2\delta_0 + \delta_{-1/m})$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ (b) $m^3(\delta_{1/m} - \delta_{-1/m} - 2D\delta_0)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$.

Exercice 30. Soit f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$) qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$). La suite u_{f_m} $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge-t-elle vers u_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$? Justifier.

Exercice 31. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) = \varepsilon|x|^{\varepsilon-1}$ $(x \in \mathbb{R}_0)$ et on note u_ε la distribution associée. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, calculer $\lim_{\varepsilon\to0} u_\varepsilon$.

Exercice 32. Soit f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ la suite définie par

$$f_m(x) = \frac{\sin(mx)}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_0$$

et soit u_m la distribution associée à f_m. Etudier la convergence de cette suite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 33. Démontrer qu'au sens distributions, on a

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{i\lambda x}\mathrm{Vp}(1/x) = i\pi\delta_0.$$

Exercice 34. Pour tout $\alpha > 0$ on pose

$$T_\alpha \ = \ \frac{1}{2\alpha}\left(Vp\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) - Vp\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)\right).$$

Déterminer $\lim_{\alpha\to0} T_\alpha$ au sens distributions.

4.2 Autres

Exercice 35. Pour tout $N \in \mathbb{N}_0$ considérons la fonction F_N définie par

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$$

et soit u_N la distribution associée à F_N. Montrer que la suite u_N $(N \in \mathbb{N}_0)$ converge vers $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi p}$.

5 Composition

5.1 Exercices de base

Exercice 36. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Montrer que la distribution $gD\delta_0$ et la fonction f sont composables et calculer leur produit de composition.

Exercice 37. Calculer $(x^3D^2\delta_0) \star (x^2D\delta_0)$ et $(x^2D^3\delta_0) \star (x^2D^4\delta_0)$.

Exercice 38. Si u est une distribution à support compact dans $\mathbb{R}$ et si P est un polynôme, alors $u \star P$ est aussi un polynôme.

5.2 Autres

Exercice 39. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs positives et d'intégrale égale à 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si u_ε est la distribution associèe à $u * \rho_\varepsilon$, montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} u_\varepsilon = u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 40. On définit par récurrence la suite de distributions u_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ par

$$u_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \quad \text{et} \quad u_k = u_{k-1} \star u_1,\ k \geq 2.$$

Ecrire u_k comme combinaison linéaire de distributions de Dirac.

6 Distributions tempérées

6.1 Exercices de base

Exercice 41. On considère les fonctions déinies dans $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = c,\quad f_2(x) = x^n,\quad f_3(x) = e^x \ \text{ et } \ f_4(x) = e^{iax},\quad f_5(x) = \cos(x)\sin(x),$$

avec $c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$ et $a \in \mathbb{R}$. Les distributions associées sont-elles tempérées dans $\mathbb{R}$? Si oui, en calculer la transformée de Fourier.

Exercice 42. Convergences dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
• Justifier que si φ_m $(m \in \mathbb{N})$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vers $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors la convergence a aussi lieu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
• Donner une suite de fonctions φ_m $(m \in \mathbb{N})$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 43. Montrer que pour tout $p \in \{1, 2, \infty\}$ on a les inclusions

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Exercice 44. On reprend les éléments introduits dans l'exercice 40. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, calculer la transformée de Fourier $\mathcal{F}^- u_k$.

Exercice 45. Soient u une distribution tempérée dans $\mathbb{R}$ et x un réel. On considère l'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (u * \varphi)(x).$$

• Montrer que cette application est une distribution.
• Cette distribution est-elle tempérée ? Pourquoi ?

Exercice 46. Soient u une distribution tempérée dans $\mathbb{R}$ et φ un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Vu l'exercice 45, la fonction $g : x \mapsto (u * \varphi)(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
• Montrer que cette fonction appartient à $C_\infty(\mathbb{R})$ et que l'on a

$$D^\alpha g = D^\alpha (u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * D^\alpha \varphi \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0.$$

• Montrer que cette fonction g définit une distribution tempérée (notée comme d'habitude, à savoir u_g) mais n'appartient pas toujours à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
• Montrer que $\mathcal{F}^\pm u_g = \mathcal{F}^\pm \varphi \, \mathcal{F}^\pm u$.

Exercice 47. Rappelons que la transformée de Fourier de la distribution Y associée à la fonction $H = \chi_{]0,+\infty[}$ est donnée par

$$\mathcal{F}^\pm Y(\varphi) = \mathcal{F}^\pm u_H(\varphi) = \pi\varphi(0) \pm i \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \pi\varphi(0) \pm i Vp\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi), \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

En déduire l'expression de la transformée de Fourier de la valeur principale de $1/x$.

Exercice 48. Soit a_k ($k \in \mathbb{N}$) une suite de complexes. On définit

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \varphi(k).$$

• Montrer que u définit une distribution sur $\mathbb{R}$.
• Montrer que u est une distribution tempérée si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que $|a_k| \ \leq \ C \ (1 + k)^p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 49. Si f est localement intégrable et $a-$ périodique ($a > 0$) alors quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \varphi(x)\ dx \ = \ \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^a f(t)\ e^{-2i\pi kt/a}\ dt \times \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi kx/a} \varphi(x)\ dx.$$

On en déduit que
• f est nul (presque partout) si et seulement si

$$\int_0^a f(x)\ e^{2ik\pi x/a}\ dx \ = \ 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

• f est constant presque partout si et seulement si

$$\int_0^a f(x)\ e^{2ik\pi x/a}\ dx \ = \ 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0,$$

la constante étant égale à

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(t)\ dt.$$

Exercice 50 (Transformée de Fourier du peigne de Dirac)**.** Pour tout $a > 0$, on considère l'application

$$\Delta_a : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(ka).$$

• Montrer que Δ_a définit une distribution tempérée.
• Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que $\mathcal{F}^{\pm}\Delta_a = b\Delta_b$.

Exercice 51. On considèe les applications

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}} m\varphi(m)\ , \quad v : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(m).$$

• Montrer que u et v sont des distributions tempérées.
• Montrer que l'on a $\mathcal{F}^{-}u = iDv$.

Exercice 52. Si u est une distribution tempérée telle que $\Delta u = 0$, montrer que u est associée à une fonction polynomiale.

6.2 Autres

Exercice 53. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution à support compact. Si $u(x^\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, montrer que $u = 0$.

Exercice 54. Calculer la distribution, $\mathcal{F}^{-}u_{|.|}$, la relier à la valeur principale de $1/x$ et en déduire la valeur de $\mathcal{F}^{-}\left(\mathrm{Vp}(1/x^2)\right)$ (voir l'exercice 10).

Exercice 55. • (*) Soit une fonction localement intégrable f pour laquelle il existe un naturel p tel que la fonction $x \mapsto |f(x)|/(1+|x|^p)$ soit intégrable. Montrer que la distribution associée à f est tempérée.
• Calculer la dérivée de la fonction g donnée par $g(x) = x^m \sin(\exp(x))$ (m est un naturel). En déduire que si u est la distribution associée à la fonction f définie par

$$f(x) = x^m \exp(x) \cos(\exp(x))$$

avec $m \geq 1$, alors u est une distribution tempérée.
• Déduire de ce qui précède que la réciproque du point $(*)$ est fausse.
• (Réciproque de (*) sous une hypothèse suppémentaire.) Si f est localement intégrable, définit une distribution tempéré et est à valeurs positive, alors il existe un naturel p tel que $x \mapsto |f(x)|/(1+|x|^p)$ soit intégrable

7 Divers

Exercice 56. Pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, il existe uns suite φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que la suite des distributions associées aux φ_m converge vers u au sens distributions.

Exercice 57. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit la gaussienne g_ε définie par $g_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x^2}$ et soit u_ε la distribution associée. Montrer que, au sens distributions, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{u_\varepsilon} = \sqrt{2\pi}\,\delta_0.$$

Eléments de solutions

.

Section 2, exercice 16. Utiliser le développement limité de Taylor de φ en 0 sous sa forme intégrale et calculer
$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^{k+1}}\, dx.$$

Section 3, exercice 25. Procéder de manière similaire au cas des fonctions.

Section 5, exercice 39. Penser aux propriétés d'associativité du produit de composition.

Section 5, exercice 40. Penser à une preuve par récurrence et à une égalité de type (au départ) ≪ binôme de Newton ≫.
Section 6, exercice 35. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathbb{N}_0$ tels que $[\varphi] \subset [-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que
$$u_N(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}\phi(t)dt,$$
où $\phi(t) = \sum_{m=-M}^{M} \varphi(t+2m\pi)$. En déduire que la suite u_N $(N \in \mathbb{N}_0)$ converge vers $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi p}$.

Section 6, exercice 53. Calculer les dérivées de la fonction entière qui définit la transformée de Fourier de la distribution.

Section 6, exercice 55. Pour le dernier point, penser par exemple au théorème de Lévi et à une suite ψ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ bien choisie telle que la suite $f(x)\,\psi_m(x)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers $f(x)$ pour presque tout x ($\psi_m(x) = \psi(x/m)$ avec ψ bien choisi)

Section 7, exercice 56. Techniques habituelles de régularisation et troncature.