

LISTE POUR TD AVRIL 2017

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\varphi_m(x) = \frac{\varphi\left(x + \frac{1}{m}\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{m}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Montrer que $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.
- La suite $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge-t-elle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$? Si oui, en déterminer la limite.

2. Les applications suivantes sont-elles des distributions dans \mathbb{R} ? Justifier. En cas de réponse affirmative, en déterminer le support.

$$\begin{aligned} u_1 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(x)(D\varphi)(x) dx & u_2 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(e^x) dx \\ u_3 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \int_0^1 (D\varphi)(x) dx & u_4 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0) \right) \\ u_5 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x_n) & u_6 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_0) &\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \varphi(x_n) \end{aligned}$$

où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de réels qui converge vers 0.

3. On pose

$$u(\varphi) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que u définit une distribution dans \mathbb{R} et que si $f(x) = \ln(|x|)$, $x \in \mathbb{R}_0$, alors $u = D^2 u_f$. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- Déterminer le plus grand naturel p pour lequel cette fonction est de classe C^p dans \mathbb{R} .
- Montrer qu'au sens distribution (dans \mathbb{R}), cette fonction vérifie l'équation

$$D^2 u + u = \chi_{]0, +\infty[}. \quad (1)$$

- En déduire la solution générale dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation 1.
- Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes

$$\begin{aligned} (a) \quad xu &= u & (b) \quad x^2 u + u &= 0 & (c) \quad Du &= u_Y \\ (d) \quad xDu &= u_Y & (e) \quad xDu &= \delta_0 & (f) \quad xDu + u &= \delta_0. \end{aligned}$$

4. Soient u une distribution dans \mathbb{R}^n et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$\varphi u = 0 \Rightarrow u(\varphi) = 0$$

mais que la réciproque est fautive.

5. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est non nul, alors sa transformée de Fourier n'est pas à support compact.