TD – Avril 2018

Exercice 1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\varphi_m(x) = \frac{\varphi(x+1/m) - \varphi(x)}{1/m}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Montrer que $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

(b) La suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge-t-elle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$? Si oui, en déterminer la limite.

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles des distributions dans $\mathbb{R}$? Justifier. En cas de réponse affirmative, en déterminer le support.

(a) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(x)(D\varphi)(x)\,dx$

(b) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^{1} (D\varphi)(x)\,dx$

(c) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x_n)$

(d) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(e^x)\,dx$

(e) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\varphi(1/n) - \varphi(0)\right)$

(f) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_0) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\varphi(x_n)$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ désigne une suite de réels qui converge vers 0.

Exercice 3. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$u(\varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right).$$

Montrer que u définit une distribution dans $\mathbb{R}$ et que si $f(x) = \ln(|x|)$ $(x \in \mathbb{R}_0)$ alors $u = D^2 u_f$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1-\cos(x) & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Déterminer le plus grand naturel p pour lequel cette fonction est de classe C^p dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer qu'au sens distribution (dans $\mathbb{R}$), cette fonction vérifie l'équation

$$D^2u + u = \chi_{]0;+\infty[}. \tag{1}$$

(c) Déduire la solution générale dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation (1).

Exercice 5. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

(a) $xu = u$

(b) $x^2u + u = 0$

(c) $Du = u_Y$

(d) $xDu = u_Y$

(e) $xDu = \delta_0$

(f) $D^2u + 4u = \delta_0$

Exercice 6. Soient u une distribution dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$\varphi u = 0 \Rightarrow u(\varphi) = 0$$

mais que la réciproque est fausse.

Exercice 7. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est non nul, alors sa transformée de Fourier n'est pas à support compact.

Exercice 8. Soit u une distribution tempérée dans $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

(a) Montrer que la distribution $D^\alpha u$ est également tempérée.

(b) Montrer que

$$\mathcal{F}^\pm(D^\alpha u) = (\mp i)^\alpha f_\alpha \mathcal{F}^\pm u \quad \text{et} \quad D^\alpha(\mathcal{F}^\pm u) = (\pm i)^\alpha \mathcal{F}^\pm(f_\alpha u)$$

où $f_\alpha(x) = x^\alpha$ $(x \in \mathbb{R})$.

(c) La distribution $D^2\delta_0$ est-elle tempérée dans $\mathbb{R}$? Si oui, en calculer la transformée de Fourier.

Exercice 9. Si cela a un sens, déterminer la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction $f : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$.

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, soient

$$f_n(x) = \sqrt{(n/\pi)}\, e^{-nx^2} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Montrer que la suite de distributions associées aux fonctions f_n converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution à déterminer. Même question pour F_n.