

2. Convergences ponctuelle et uniforme

Exercice 1. Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme (sur \mathbb{R}) des suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$(a) f_m(x) = \chi_{[-m, m]}(x) \quad (b) f_m(x) = m\chi_{[-m, m]}(x) \quad (c) f_m(x) = mx\chi_{[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]}(x)$$

Exercice 2. (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = \frac{m^2 x}{1 + m^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} , sur $]0, +\infty[$, et sur les compacts de $]0, +\infty[$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{x}{m}\chi_{[0, m]}(x) + (m + 1 - x)\chi_{]m, m+1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur \mathbb{R} ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur \mathbb{R} et sur les intervalles $] -\infty, r]$ avec $r > 0$.

(c) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = me^{-m^2 x}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $]0, +\infty[$ ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $]0, +\infty[$ et sur les bornés fermés de $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle borné $]a, b[$ de \mathbb{R} . Si cette suite converge uniformément vers la fonction f sur $]a, b[$, montrer que f est intégrable sur $]a, b[$ et que

$$\int_a^b f_m(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

si $m \rightarrow +\infty$.

En déduire que

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-m} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

Exercice 4. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ la suite de fonctions définies par $f_m(x) = (1 - x^2)^m$, $x \in [0, 1]$.

- (a) Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $[0, 1]$.
- (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $[0, 1]$ et sur les sous-intervalles de $[0, 1]$.
- (c) Calculer la limite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1 - x^2)^m dx.$$

Exercice 5. Soit la suite de fonctions $(f_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$ définies pour tout $x \in [0, +\infty[$ par

$$f_N(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$. Prouver que la suite $(f_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.

Exercice 6. Développer la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en série de puissances naturelles de x .

Exercice 7. Posons

$$S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m^2}.$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de cette série.
- (b) Où la fonction S est-elle définie, continue et dérivable ?
- (c) Etablir qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$S(x) + S(1-x) = a - \ln(x) \ln(1-x)$$

pour tout $x \in]0, 1[$.

- (d) Montrer que

$$a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

et que

$$a - \ln(2)^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 2^{m-1}}.$$

Exercice 8. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2 m} x^m \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-m} dt \right) x^m.$$