

## 2. Convergences ponctuelle et uniforme

**Exercice 1.** Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme (sur  $\mathbb{R}$ ) des suites  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  de fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$(a) f_m(x) = \chi_{[-m, m]}(x) \quad (b) f_m(x) = m\chi_{[-m, m]}(x) \quad (c) f_m(x) = mx\chi_{[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]}(x)$$

**Exercice 2.** (a) Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on pose

$$f_m(x) = \frac{m^2 x}{1 + m^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{R}$  ainsi que la convergence uniforme de  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{R}$ , sur  $]0, +\infty[$ , et sur les compacts de  $]0, +\infty[$ .

(b) Pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ , on pose

$$f_m(x) = \frac{x}{m}\chi_{[0, m]}(x) + (m + 1 - x)\chi_{]m, m+1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  sur  $\mathbb{R}$  ainsi que la convergence uniforme de  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  sur  $\mathbb{R}$  et sur les intervalles  $] -\infty, r]$  avec  $r > 0$ .

(c) Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on pose

$$f_m(x) = me^{-m^2 x}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  sur  $]0, +\infty[$  ainsi que la convergence uniforme de  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  sur  $]0, +\infty[$  et sur les bornés fermés de  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 3.** Soit  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle borné  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ . Si cette suite converge uniformément vers la fonction  $f$  sur  $]a, b[$ , montrer que  $f$  est intégrable sur  $]a, b[$  et que

$$\int_a^b f_m(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

si  $m \rightarrow +\infty$ .

En déduire que

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-m} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

**Exercice 4.** Soit  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  la suite de fonctions définies par  $f_m(x) = (1 - x^2)^m$ ,  $x \in [0, 1]$ .

(a) Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur  $[0, 1]$ .

(b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur  $[0, 1]$  et sur les sous-intervalles de  $[0, 1]$ .

(c) Calculer la limite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1 - x^2)^m dx.$$

**Exercice 5.** Soit la suite de fonctions  $(f_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$  définies pour tout  $x \in [0, +\infty[$  par

$$f_N(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

Soit la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-2x}$ . Prouver que la suite  $(f_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .

**Exercice 6.** Développer la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  en série de puissances naturelles de  $x$ .

**Exercice 7.** Posons

$$S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m^2}.$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de cette série.
- (b) Où la fonction  $S$  est-elle définie, continue et dérivable ?
- (c) Etablir qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que

$$S(x) + S(1-x) = a - \ln(x) \ln(1-x)$$

pour tout  $x \in ]0, 1[$ .

- (d) Montrer que

$$a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

et que

$$a - \ln(2)^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 2^{m-1}}.$$

**Exercice 8.** Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2 m} x^m \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-m} dt \right) x^m.$$