

2. Intégrales eulériennes

Exercice 1. Calculer si possible les limites

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m) \right).$$

Exercice 2. Exprimer $\Gamma(5/6)$ en fonction de $\Gamma(1/6)$.

Exercice 3. Prouver de deux façons différentes que la fonction Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4. Etablir que pour tous $m > 0, n > -1, a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^m} x^n dx = \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) a^{-\frac{n+1}{m}}.$$

Exercice 5. Pour tout $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x}.$$

Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

Exercice 6. Montrer que la mesure d'une boule de \mathbb{R}^n de rayon $r > 0$ est donnée par la formule

$$\omega_n(r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

En déduire que $\omega_n(r) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 7. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel α l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha(x) dx$$

est bien définie et calculer sa valeur.

Exercice 8. Prouver que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!k!2^k}{(2k+1)!}$$

converge absolument et montrer qu'elle est égale à $\pi/2$.

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 9 (Définition de Gauss de Γ). Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^x m!}{x(x+1)\dots(x+m)}.$$

Exercice 10. Prouver que

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin(\pi x) dx = \frac{1 + \log(\pi/2)}{\pi}.$$