Année académique 2017-2018
2e Bloc Maths-Physique

1. Révisions

Exercice 1. Soit a un paramètre réel. Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ lorsque le terme général x_m est égal à

(a) $x_m = 2^m a^m$ (b) $x_m = \dfrac{m^2+2}{m^2+m+1}\, a^m$ (c) $x_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{a}{(m+k)^2}$ (d) $x_m = \dfrac{a^{\ln(m)}}{m^a}$

Exercice 2. (a) Pour quelles valeurs du paramètre réel α, la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $]0,1[$?

(b) Pour quelles valeurs du paramètre réel β, la fonction

$$x \mapsto x^\beta(e^{-x}-1)$$

est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 3. Calculer si possible les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^{\pi/4} \sin(x)\cos(3x)\,dx$

(b) $\int_{-\infty}^0 e^{ix}\,dx$

(c) $\int_1^e \dfrac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$.

Exercice 4. Calculer si possible les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln(x)}\,dx$ pour tous $a, b > 1$,

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-bx}\,\frac{\sin(ax)}{x}\,dx$ pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

Exercice 5. (a) Soit $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+y)(1+yx^2)}$$

est intégrable sur Ω et calculer son intégrale.

(b) En déduire que la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ et la valeur de son intégrale.