1. Révisions

Exercice 1. Soit a un paramètre réel. Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$(1)\ x_m = 2^m a^m \qquad (2)\ x_m = \frac{m^2+2}{m^2+m+1}\,a^m \qquad (3)\ x_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{a}{(m+k)^2} \qquad (4)\ x_m = \frac{a^{\ln(m)}}{m^a}$$

Exercice 2. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$(1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2} \qquad (2)\ \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k+3}{k^2-1} \qquad (3)\ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k^2+1}{k^3+1} \qquad (4)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{\sqrt[3]{k}}$$

Exercice 3. (1) Pour quelles valeurs du paramètre réel α, la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $]0,1[$?

(2) Pour quelles valeurs du paramètre réel β, la fonction

$$x \mapsto x^\beta(e^{-x}-1)$$

est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 4. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$(1)\ \int_0^{\pi/4} \sin(x)\cos(3x)\,dx \qquad (2)\ \int_{-\infty}^{0} e^{ix}\,dx \qquad (3)\ \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}.$$

Exercice 5. Calculer si possible les intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln(x)}\,dx$ pour tous $a, b > 1$,

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-bx}\,\frac{\sin(ax)}{x}\,dx$ pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

Exercice 6. (1) Soit $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+y)(1+yx^2)}$$

est intégrable sur Ω et calculer son intégrale.

(2) En déduire que la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ et la valeur de son intégrale.