2. Convergences ponctuelle et uniforme

Exercice 1. Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme (sur $\mathbb{R}$) des suites $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions définies pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

(a) $f_m(x) = \chi_{[-m,m]}(x)$ (b) $f_m(x) = m\chi_{[-m,m]}(x)$ (c) $f_m(x) = mx\chi_{[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}]}(x)$

Exercice 2. (a) Pour tout $m\in\mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = \frac{m^2x}{1+m^2x^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$, sur $]0,+\infty[$, et sur les compacts de $]0,+\infty[$.

(b) Pour tout $m\in\mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{x}{m}\chi_{[0,m]}(x) + (m+1-x)\chi_{]m,m+1]}(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$ et sur les intervalles $]-\infty,r]$ avec $r>0$.

(c) Pour tout $m\in\mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = me^{-m^2x}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $]0,+\infty[$ ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $]0,+\infty[$ et sur les bornés fermés de $]0,+\infty[$.

Exercice 3. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle borné $]a,b[$ de $\mathbb{R}$. Si cette suite converge uniformément vers la fonction f sur $]a,b[$, montrer que f est intégrable sur $]a,b[$ et que

$$\int_a^b f_m(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$$

si $m\to+\infty$.

En déduire que

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-m} = \int_0^1 x^{-x}dx.$$

Exercice 4. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ la suite de fonctions définies par $f_m(x) = (1-x^2)^m$, $x\in[0,1]$.

(a) Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $[0,1]$.

(b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $[0,1]$ et sur les sous-intervalles de $[0,1]$.

(c) Calculer la limite

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^1 (1-x^2)^m\,dx.$$

Exercice 5. Soit la suite de fonctions $(f_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ définies pour tout $x\in[0,+\infty[$ par

$$f_N(x) = e^{-x}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}x^n.$$

Soit la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$. Prouver que la suite $(f_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.

Exercice 6. Développer la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en série de puissances naturelles de x.

Exercice 7. Posons

$$S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m^2}.$$

(a) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de cette série.

(b) Où la fonction S est-elle définie, continue et dérivable ?

(c) Etablir qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$S(x) + S(1-x) = a - \ln(x)\ln(1-x)$$

pour tout $x \in \,]0,1[$.

(d) Montrer que

$$a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

et que

$$a - \ln(2)^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 2^{m-1}}.$$

Exercice 8. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2 m}\, x^m \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-m}\, dt \right) x^m.$$